Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. M. Calanchi, C. Cavaterra, F. Messina, E. Terraneo)
prova scritta 24 gennaio 2014 - 9 CREDITI
Versione A

1. **(PUNTI 5)** Calcolare, al variare del parametro reale α, il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x+x^2} - 1 - 3x^2 - \mathrm{Sh}(2x)}{x^3 + \alpha x^2}$$

(scrivere uno svolgimento completo)

---

2. **(PUNTI 3)** Determinare al variare del parametro reale a le soluzioni di

$$\log_{1/3}\left(\frac{x-a}{x-2}\right) > 0$$

(Dare solo la risposta)

. . . .

. . . .

3. **(PUNTI 8)** Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = |x-1|e^{\frac{x+2}{x-3}}$$

Determinare

(a) l'insieme di definizione A ....

(b) i limiti agli estremi dell'insieme di definizione A ....

....

(c) eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)

....

(d) f' e il suo insieme di definizione A'

....

....

(e) i limiti di f' agli estremi di A'

....

....

(f) eventuali punti estremanti

....

(g) tracciarne un grafico qualitativo

4. **(PUNTI 5)** Si considerino in $\mathbb{R}$ (dotato della metrica euclidea) i seguenti sottoinsiemi:

$$I_n = \{x \in \mathbb{R} : \ -3 + \frac{1}{n} \le x \le n^2\},\ n \in \mathbb{N}; \qquad J = \{x \in \mathbb{R} :\ x = -3 - \frac{1}{n^2};\ n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Determinare gli insiemi

$E = (\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n) =$ ....

$F = (\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n) =$ ....

(b) Quali tra le seguenti affermazioni sono vere (V) e quali sono false (F)?

$E \cup J$ è aperto.........

$F \cup J$ è chiuso......

$E \cup J$ non è limitato ....

$F \cup J$ è compatto.........

(c) Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $F \cup J =$ ....

---

5. **(PUNTI 6)** Rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

$$A = \left\{z \in C : |z| > 2,\ Im(iz) > 0,\ Re(z^2) > 0\right\},$$

$$B = \{w \in C : w = iz,\ z \in A\}, \qquad C = \left\{u \in C : u^2 = z,\ z \in A\right\}.$$

6. **(PUNTI 5)** Sia data

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - 1}{1+\frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \right\} n^{\alpha^2-1}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge. *(scrivere uno svolgimento completo)*

Questo esercizio verrà valutato <u>*solo*</u> se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(BONUS - **Punti 2**) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua su $\mathbb{R}$ e tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

(a) Dimostrare che f non è suriettiva su $\mathbb{R}$.

(b) $f(\mathbb{R})$ è chiuso? $f(\mathbb{R})$ è aperto? Giustificare le risposte.