Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. M. Calanchi, C. Cavaterra)
prova scritta 22 Settembre 2014 - 9 CREDITI

1. **(PUNTI 8)** Sia $f(x) = \log(e^{2x-\sqrt{x^2-1}} - e)$

   Determinare

   (a) l'insieme di definizione A . . . .

   (b) i limiti agli estremi dell'insieme di definizione A ed eventuali asintoti . . . .

   . . . .

   (c) f' e il suo insieme di definizione A'

   . . . .

   . . . .

   (d) i limiti di f' agli estremi di A'

   . . . .

   . . . .

   (e) eventuali punti estremanti

   . . . .

   (f) tracciarne un grafico qualitativo

2. **(PUNTI 4)** Si considerino in $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica euclidea i seguenti sottoinsiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \qquad B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{Q}\}$$

$$C = \left\{ (a_n, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad D = (A \setminus B) \cup C$$

Determinare:

(a) $D^o = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(b) $D' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(c) $\partial D = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(d) $\overline{D} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

3. **(PUNTI 4)** Date le serie

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{|a-1|}\right)^n}{n \log^2(n+1)}, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(e^{\sqrt{n}} - 1)}{n^a (e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n})}$$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie (1) è semplicemente convergente e per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie (2) è semplicemente convergente.

(scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

4. **(PUNTI 4)** Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione e rappresentarle nel piano di Argand Gauss

$$z^2 - z\,\overline{z} + (\mathrm{Im}\overline{z})^2 \ - 2i\ \mathrm{Re}z\ \mathrm{Im}z \ + \ 4 \ = 0$$

---

5. **(PUNTI 6)** Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} (x - 2x^2)\left[(6x^2 + 3x)\log\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 12x - 4 + 10\mathrm{e}^{-1/x}\right]$$

(scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

6. **(PUNTI 4)** Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

Stabilire se f è derivabile due volte in $x = 0$.

(scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)