

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Orale :  24/25 Luglio 28/29/30 LuglioScritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
- Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
- Chi vuole sfruttare il *bonus* primo compito, NON deve svolgere l'**esercizio 1**.
- L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.

**Esercizio 0.** Si consideri lo spazio  $\mathbb{R}^3$  ed un generico punto  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ . Determinare se la forza  $\mathbf{F} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})\mathbf{x}$  è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} .$$

Si richiede di:

- determinare eventuali soluzioni stazionarie, periodiche e la loro natura;
- discutere qualitativamente la dinamica;
- discutere i comportamenti asintotici per  $t \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$ .

**Esercizio 2.** In un sistema di riferimento  $\{O, x, y, z\}$ , con  $z$  asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = -\frac{1}{\varrho} ,$$

dove  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Inoltre, una molla di costante elastica  $k$ , e lunghezza a riposo nulla, collega  $P$  alla sua proiezione  $P^*$  sul piano orizzontale  $Oxy$ . Si richiede di:

- scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- determinare le costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto;
- descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.

**Esercizio 3.** Due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$ , sono vincolate a muoversi in un piano verticale  $Oxy$ , con  $y$  asse verticale ascendente. Il punto  $P_1$  è ulteriormente vincolato all'asse  $x$ , mentre  $P_2$  è vincolato alla retta  $x = -y$ . Entrambi i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono attirati verso l'origine  $O$  da due molle di costante elastica  $k$ . Inoltre i due punti sono collegati da una molla di costante elastica  $\varepsilon$ . Si richiede di:

- (i) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (ii) determinare i modi normali attorno all'eventuale equilibrio stabile;
- (iii) indicare le posizioni iniziali che caratterizzano i modi normali, per velocità iniziali nulle ed  $\varepsilon > 0$ . Discutere il caso  $\varepsilon = 0$ .