

8 Settembre 2014

Versione A

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

09.09.2014

10.09.2014

11.09.2014

---

Scritto di **Fisica Matematica 1**

---

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
  - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
  - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova scritta.
- 

**Esercizio 0.** Si consideri lo spazio  $\mathbb{R}^2$ . Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + 2xy, y + x^2 - y^2)$$

è conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio  $\mathbb{R}^2$  e il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1) \end{cases} .$$

Si richiede di:

- determinare un'eventuale costante del moto;
- determinare i punti critici e discuterne la stabilità;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;

**Esercizio 2.** Si considerino due punti materiali di masse  $m = 2$ , che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = \frac{\alpha}{\varrho} - \log \varrho, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

dove  $\varrho = |r|$  e  $r = r_1 - r_2$  è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del parametro  $\alpha$  e del modulo del momento angolare  $L \neq 0$ , si richiede di:

- scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa;
- determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- descrivere qualitativamente la dinamica nel piano  $(\varrho, \dot{\varrho})$ ;
- determinare le orbite periodiche nel piano  $(\varrho, \dot{\varrho})$ ;
- determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.

**Esercizio 3.** Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato ad una retta orizzontale nel piano cartesiano  $Oxy$ . Un altro punto materiale  $Q$  di egual massa  $m$  è vincolato,

nello stesso piano, ad una retta orizzontale parallela alla prima che dista  $l$  da essa. Sul sistema agisce la gravità e i due punti  $P$  e  $Q$  sono collegati tra loro da una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange utilizzando le ascisse dei punti  $P$  e  $Q$  come coordinate lagrangiane;
- (ii) cambiando opportunamente le coordinate, mostrare l'esistenza di una variabile ciclica. Determinare la costante del moto associata e scrivere la Lagrangiana ridotta;
- (iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni per la Lagrangiana ridotta e dare una stima del discostamento delle piccole oscillazioni dalle soluzioni reali;
- (iv) dare un'interpretazione fisica del moto corrispondente all'equilibrio relativo.