17 Novembre 2014 **Versione A**

Nome : .... Cognome : ....

Matricola : ....

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

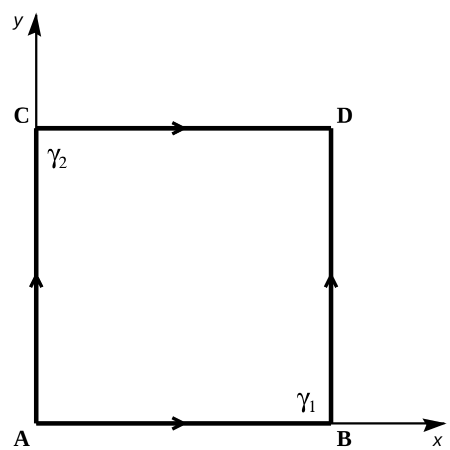
○ 18 ○ 19 ○ 20 ○ 21 ○ 24 ○ 25

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
- Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
- L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova scritta.

Esercizio 0. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ ed un generico punto $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{x}$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente. Infine, calcolare il lavoro compiuto muovendosi nel piano xy lungo i cammini γ_1 $(A \to B \to D)$ e γ_2 $(A \to C \to D)$ riportati in figura, con

$$A = (0,0)\ , \quad B = (1,0)\ , \quad C = (0,1)\ , \quad D = (1,1)\ .$$



Esercizio 1. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^2$ e il sistema (in coordinate polari)

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\vartheta} = 1 + r^2 \end{cases} ,$$

con μ parametro reale. Al variare del parametro μ, si richiede di:

(i) determinare eventuali punti di equilibrio e/o cicli limite, discutendone la stablità;
(ii) tracciare il ritratto di fase;
(iii) discutere qualitativamente la dinamica.

*(iv) posto inizialmente $\mu > 0$, sia $r(0) = \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 0.5$. Supponiamo di aspettare abbastanza tempo perchè il dato iniziale sia attratto da eventuali punti stazionari e/o cicli limite. Come deve essere modificato il parametro μ per permettere alla variabile radiale r di assumere nuovamente il valore iniziale?

Esercizio 2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, con $\boldsymbol{k}$ orientato lungo la verticale ascendente. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di eguale massa m, vincolati agli estremi di un'asta rigida ideale di lunghezza 2ℓ. Il centro dell'asta, G, è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio $R > \ell$ che giace nel piano orizzontale. I punti P_1 e P_2 sono collegati ai punti immateriali Q_1 e Q_2, rispettivamente, da due molle di eguale costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. I punti Q_1 e Q_2 rappresentano le proiezioni di P_1 e P_2 sull'asse verticale. Si richiede di:

(i) scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare tre costanti del moto;
(ii) utilizzando tali costanti del moto, mostrare che il problema è risolubile per quadrature: si mostri in particolare che si riduce ad un problema unidimensionale;
(iii) si tracci il ritratto di fase e si discuta qualitativamente la dinamica del suddetto problema unidimensionale;
(iv) si determini una soluzione periodica per il sistema completo.

Esercizio 3. Si consideri un piano verticale Oxy, con y diretto secondo la verticale ascendente. Due punti materiali P_1 e P_2 di eguale massa m sono vincolati a scorrere senza attrito lungo una guida curvilinea di equazione

$$y = ax^2 \ , \qquad a \neq 0 \ .$$

Inoltre, i punti si attraggono reciprocamente con una forza di energia potenziale

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{4}(x_1 - x_2)^4 \ , \qquad k > 0 \ ,$$

con x_1 e x_2 ascisse dei punti P_1 e P_2, rispettivamente. Si richiede di:

(i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
(ii) determinare eventuali posizioni di equilibrio del sistema al variare del parametro $a \neq 0$ e discuterne la stabilità;
(iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle eventuali posizioni di equilibrio stabile;
(iv) studiare il caso $a = 0$, mostrando in particolare che il sistema è integrabile per quadrature.