

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 15 16 19 20 21Scritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Chi vuole sfruttare il *bonus* primo compito, **NON** deve svolgere l'**esercizio 1**.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\mathbf{F} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})\mathbf{x}$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} .$$

Si richiede di:

- (i) determinare eventuali soluzioni stazionarie, periodiche e la loro natura;
- (ii) discutere qualitativamente la dinamica;
- (iii) discutere i comportamenti asintotici per $t \rightarrow +\infty$ e $t \rightarrow -\infty$.

Esercizio 2. In un sistema di riferimento $\{O, x, y, z\}$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = -\frac{1}{\varrho} ,$$

dove $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre, una molla di costante elastica k , e lunghezza a riposo nulla, collega P alla sua proiezione P^* sul piano orizzontale Oxy . Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare le costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.

Esercizio 3. Due punti pesanti P_1 e P_2 di egual massa m , sono vincolate a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. Il punto P_1 è ulteriormente vincolato all'asse x , mentre P_2 è vincolato alla retta $x = -y$. Entrambi i punti P_1 e P_2

sono attirati verso l'origine O da due molle di costante elastica k . Inoltre i due punti sono collegati da una molla di costante elastica ε . Si richiede di:

- (i) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (ii) determinare i modi normali attorno all'eventuale equilibrio stabile;
- (iii) indicare le posizioni iniziali che caratterizzano i modi normali, per velocità iniziali nulle ed $\varepsilon > 0$. Discutere il caso $\varepsilon = 0$.