

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare **SOLO** i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 13.02 16.02 18.02 23.02 24.02

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
- Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
- L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova scritta.

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (-y, -x, z)$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} = 2r - \sin \vartheta \end{cases} ,$$

con $r \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in \mathbb{T}$. Si richiede di:

- determinare una eventuale costante del moto $\Phi(r, \vartheta)$, tale che $\Phi(0, 0) = 0$;
- studiare le curve di livello della costante del moto nel piano delle fasi;
- determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- mostrare che l'orbita corrispondente al dato iniziale $(1/3, \pi/2)$ è periodica.

Esercizio 2. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z orientato lungo la verticale ascendente, si consideri un punto P di massa unitaria vincolato a muoversi sulla superficie ottenuta ruotando la curva di equazione $x = e^{-z^2}$ attorno all'asse verticale. Sul punto agisce una forza elastica di richiamo verso l'origine di costante elastica k . Si trascuri la forza di gravità. Si richiede di:

- scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- mostrare l'esistenza di una variabile ciclica e scrivere la Lagrangiana ridotta;
- descrivere la dinamica del sistema ridotto e di quello completo.

Esercizio 3. In un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente, si considerino tre punti materiali P_1 , P_2 e P_3 di egual massa m . I punti $\{P_1, P_2\}$ sono collegati tra loro da un'asticella ideale di lunghezza l . Egualmente anche i punti $\{P_2, P_3\}$ sono collegati da un'altra asticella ideale della stessa lunghezza l . Inoltre, i punti P_1 e P_3 sono vincolati a muoversi lungo la retta $x = -y$ e il punto P_1 è collegato all'origine con una molla di costante elastica k . Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali posizioni di equilibrio e la loro natura;
- (iii) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno agli eventuali equilibri stabili del sistema.