

30 Aprile 2015

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Prova intermedia di **Fisica Matematica 1**

---

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
  - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
  - Riportare in modo **chiaro** e ben **ordinato** i risultati.
  - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
- 

**Esercizio 0.** Data l'equazione

$$\ddot{x} = \sin(x) \cos(x) .$$

Determinare una costante del moto, motivando la risposta.

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y , \\ \dot{y} = -y - x - x^2 , \end{cases}$$

Si richiede di

- determinare i punti stazionari e determinarne la natura;
- scrivere il flusso linearizzato attorno all'origine mediante l'esponenziale di matrice, motivando accuratamente i passaggi;
- determinare se l'origine è asintoticamente stabile nel futuro esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema.

**Osservazione.** Se si usa la formulazione debole del teorema di Lyapunov, motivare accuratamente i passaggi per mostrare che è possibile applicare tale formulazione.

**Esercizio 2.** Consideriamo il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy , \\ \dot{y} = (x^2 - 1)(5x^2 - 1) - y^2 . \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare una costante del moto
- determinare eventuali equilibri e studiarne la natura;
- studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema meccanico monodimensionale che descrive un punto di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^4 + 2x^2 - 8x + 5)e^x .$$

Si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del sistema dinamico associato;
- (ii) determinare eventuali equilibri e studiarne la natura;
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) scrivere il flusso linearizzato attorno agli eventuali punti di equilibrio stabili e calcolarne il periodo delle piccole oscillazioni.