

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 20.07 21.07 22.07Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
- Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
- Chi vuole sfruttare il *bonus* primo compitino, **NON** deve svolgere l'**esercizio 1** e **DEVE** scrivere che usa il bonus compitino.
- L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza

$$\mathbf{F} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1)(2x^2y^2 - x^2 - 1) \\ \dot{y} = 2x(1 - y^2)(2x^2y^2 - y^2 - 1) \end{cases} .$$

Si richiede di:

- verificare che la funzione $\Phi(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2y^2 - 1)$ è una costante del moto per il sistema;
- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- tracciare il ritratto di fase;
- determinare i dati iniziali che danno origine ad orbite periodiche.

Esercizio 2. Tre punti pesanti P_1 , P_2 e P_3 di egual massa m , sono vincolati a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. Il punto P_1 è fissato nella posizione $(x_1, 0)$ con $x_1 > 0$; il punto P_2 è vincolato alla circonferenza di raggio R centrata nell'origine; il punto P_3 è fissato nella posizione (x_3, y_3) . I punti P_1 - P_2 e P_2 - P_3 sono collegati tra loro da due molle identiche di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- determinare gli equilibri e la loro natura al variare delle posizioni di P_1 e P_3 ;

- (iii) posti $x_3 = -x_1$ e $y_3 = 0$, determinare la frequenza della piccole oscillazioni attorno all'eventuale equilibrio stabile.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = -e^{-\varrho^2} ,$$

dove $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre, una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega P all'origine. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare le costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto (considerare anche il caso in cui la costante del moto sia nulla);
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.