

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 21.09 22.09 23.09Scritto di **Fisica Matematica 1**

- 
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
  - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
  - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
  - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
- 

**Esercizio 0.** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = yz , \\ \dot{y} = -xz , \\ \dot{z} = xy . \end{cases}$$

Determinare esplicitamente due costanti del moto indipendenti.

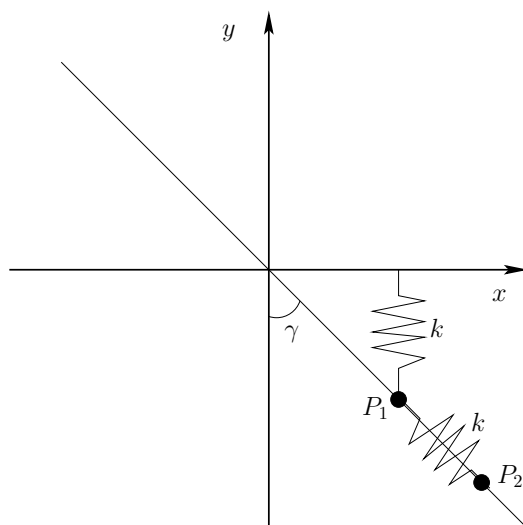
**Esercizio 1.** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - x)(1 - x - y) , \\ \dot{y} = x(2 + y) . \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- scrivere esplicitamente il flusso linearizzato attorno all'origine utilizzando l'esponenziale di matrice, motivando accuratamente i passaggi.
- mostrare che il punto  $P_1 = (0, 1)$  è asintoticamente stabile (per il sistema non-lineare).
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica.

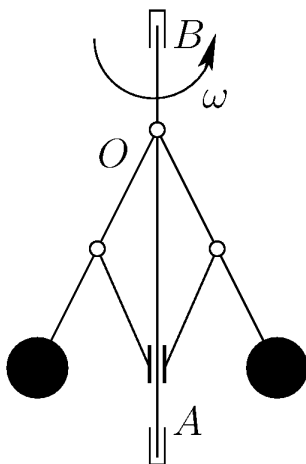
**Esercizio 2.** Si consideri il sistema rappresentato in figura



In un piano verticale  $Oxy$ , con  $y$  asse verticale ascendente, due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$ , sono vincolati a muoversi lungo una guida inclinata di angolo costante  $\gamma$  rispetto all'asse delle  $y$  (come in figura). Il punto  $P_1$  è collegato all'asse delle  $x$  con una molla di costante elastica  $k > 0$  che si mantiene sempre verticale (scorrendo lungo l'asse  $x$  senza attrito). Inoltre, i due punti  $P_1$  e  $P_2$  sono collegati da una molla di eguale costante elastica  $k$ . Trascurando il fatto che le masse possano attraversarsi, si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri e la loro natura;
- (iii) posto  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e scrivere la soluzione linearizzata utilizzando i modi normali.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema rappresentato in figura



Due punti  $P_1$  e  $P_2$  di equal massa  $m$  sono collegati all'origine  $O$  da due aste ideali, entrambe di lunghezza  $l$ . Inoltre, due ulteriori aste ideali, entrambe di lunghezza  $\frac{l}{2}$ , hanno un estremo in comune vincolato a scorrere (senza attrito) lungo un asse verticale  $AB$ , mentre gli altri estremi sono incernierati (senza attrito) ai centri delle due aste di lunghezza  $l$  (come in figura). L'intero sistema ruota attorno all'asse verticale  $AB$  con velocità angolare costante  $\omega > 0$ . Trascurando il fatto che le masse possano attraversarsi e possano anche attraversare l'asse di rotazione, si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare possibili configurazioni di equilibrio, orbite periodiche e stabilirne la natura;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema.