

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 24.11
pomeriggio 25.11
pomeriggio 26.11
mattino 27.11
pomeriggioScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xy - \sin z, \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x \cos z \right)$$

è una forza conservativa nel dominio D e, nel caso lo sia, determinarne il potenziale.

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1)(y - 1). \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare una costante del moto;
- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;
- determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche, motivando la risposta.

Esercizio 2. In un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente, due punti pesanti P_1 e P_2 di egual massa m , sono vincolati a muoversi sulla circonferenza

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 .$$

Due punti materiali P_3 e P_4 , anch'essi di massa m , possono scorrere (senza attrito) lungo l'asse x e sono collegati da una molla ai punti P_1 e P_2 , rispettivamente. Inoltre, i punti P_3 e P_4 , rispettivamente, sono a loro volta collegati da una molla ad un punto P_5 , di massa m , vincolato all'asse y . Tutte le molle hanno lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri e la loro natura;
- (iii) fissati rigidamente i punti P_1 e P_2 nelle configurazioni $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, 1)$, si consideri l'intero sistema in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante $\omega > 0$. Determinare le posizioni d'equilibrio relativo e studiarne la natura.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = \sin(x) .$$

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto (considerare anche il caso in cui la costante del moto sia nulla);
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.