

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 1 Febbraio 2 Febbraio 3 FebbraioScritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
- Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
- Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
- L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})\mathbf{x}$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema in \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xe^y, \\ \dot{y} &= -ye^x, \\ \dot{z} &= -5z + \log(1 + x^2 + y^2 + z^2).\end{aligned}$$

Si richiede di

- determinare eventuali punti di equilibrio e, nel caso se ne trovino, risolvere il problema di Cauchy del sistema linearizzato e dedurre il comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$;
- discutere la stabilità nel senso di Lyapunov degli eventuali equilibri.

Esercizio 2. Due punti pesanti P_1 e P_2 di egual massa m , sono vincolati a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. Il punto P_1 è ulteriormente vincolato all'asse x , mentre P_2 è vincolato alla retta $x = y$. Entrambi i punti P_1 e P_2 sono attirati verso l'origine O da due molle di costante elastica k . Inoltre i due punti sono collegati da una molla di costante elastica ε . Si richiede di:

- determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- determinare i modi normali attorno all'eventuale equilibrio stabile;
- indicare le posizioni iniziali che caratterizzano i modi normali, per velocità iniziali nulle ed $\varepsilon > 0$. Discutere il caso $\varepsilon = 0$.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 .$$

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto (considerare anche il caso in cui la costante del moto sia nulla);
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo e dare delle condizioni affinché il punto P resti sempre nel semispazio $z < 0$.