

Nome :

Cognome :

Matricola :

 Prova intermedia di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo **chiaro** e ben **ordinato**, mettendo in evidenza i risultati ottenuti. Gli elaborati illeggibili non saranno corretti.
-

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 8x - x^3, \\ \dot{y} = 3x^2y - 8(y - 2x^3) - 40x. \end{cases}$$

Si richiede di:

- (i) determinare una costante del moto
- (ii) determinare eventuali equilibri e la loro natura;
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche;
- (v) dare la stima del periodo di oscillazione, nel limite dell'approssimazione armonica, attorno ad un eventuale punto di equilibrio stabile.

Esercizio 2. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x^3 + x^2y - x - y. \end{cases}$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e la loro natura;
- (ii) scrivere il flusso linearizzato attorno all'origine mediante l'esponenziale di matrice;
- (iii) determinare se uno dei punti di equilibrio è asintoticamente stabile (nel futuro o nel passato), esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov;
- (iv) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema.

Osservazione. Se si usa la formulazione debole del teorema di Lyapunov, motivare accuratamente i passaggi per mostrare che è possibile applicare tale formulazione.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico monodimensionale che descrive un punto di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|}.$$

Si richiede di:

- (i) determinare eventuali costanti del moto (non banali);
- (ii) determinare eventuali equilibri e studiarne la natura;
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche.