

Nome :

Cognome :

Matricola :

 Prova intermedia di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo **chiaro** e ben **ordinato**, mettendo in evidenza i risultati ottenuti. Gli elaborati illeggibili non saranno corretti.
-

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = x^3 + x^2y - x - y. \end{cases}$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e la loro natura;
- (ii) scrivere il flusso linearizzato attorno all'origine mediante l'esponenziale di matrice;
- (iii) determinare se uno dei punti di equilibrio è asintoticamente stabile (nel futuro o nel passato), esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov;
- (iv) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema.

Osservazione. Se si usa la formulazione debole del teorema di Lyapunov, motivare accuratamente i passaggi per mostrare che è possibile applicare tale formulazione.

Esercizio 2. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 8x + 2y, \\ \dot{y} = 40x - 3x^2y + 8(y - 2x^3). \end{cases}$$

Si richiede di:

- (i) determinare una costante del moto
- (ii) determinare eventuali equilibri e la loro natura;
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche;
- (v) dare la stima del periodo di oscillazione, nel limite dell'approssimazione armonica, attorno ad un eventuale punto di equilibrio stabile.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico monodimensionale che descrive un punto di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|}.$$

Si richiede di:

- (i) determinare eventuali costanti del moto (non banali);
- (ii) determinare eventuali equilibri e studiarne la natura;
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche.