

22 Giugno 2016

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

27 Giugno

28 Giugno

29 Giugno

30 Giugno

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
 - Chi vuole sfruttare il **bonus** compitino, **NON** deve svolgere l'**esercizio 1** e **DEVE** scrivere che usa il bonus compitino.
-

Esercizio 0. Si consideri un sistema di riferimento Oxy con \mathbf{i} e \mathbf{j} versori associati agli assi cartesiani. Determinare se la forza $\mathbf{F} = (2x^3y^4 + x)\mathbf{i} + (2x^4y^3 + y)\mathbf{j}$ è conservativa.

Sia γ la curva di equazione parametrica

$$(t \cos(\pi t) - 1)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

calcolare il lavoro compiuto dalla forza lungo tale cammino.

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico in \mathbb{R}^2 descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy(2 + x^2 + x^4 - 2y^2), \\ \dot{y} = 1 + 3x^2 - 5x^4 - 7x^6 - 2y^2 - 3x^2y^2 - 5x^4y^2 + y^4. \end{cases}$$

Si richiede di:

- verificare che $\Phi(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(xy^2 - x - 2x^3 - x^5)$ è una costante del moto;
- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;
- determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche, motivando la risposta.

Esercizio 2. Due punti pesanti P_1 e P_2 , entrambi di massa m , sono vincolati a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. I punti sono collegati tra loro da un'asta ideale rigida di lunghezza $2l > 0$. Inoltre, il punto P_1 è collegato tramite due molle di costante elastica $k > 0$ a due pioli *fissi* posti rispettivamente in (a, b) e $(a, -b)$, con $a, b > 0$. Analogamente, il punto P_2 è collegato tramite due molle di costante elastica $k > 0$ a due pioli *fissi* posti rispettivamente nei punti $(-a, b)$ e $(-a, -b)$, sempre con $a, b > 0$. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = -e^{-\varrho^2} \quad , \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali costanti del moto e tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.