

7 Settembre 2016

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

13 Settembre

14 Settembre

15 Settembre

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz , \\ \dot{y} = xz , \\ \dot{z} = -xy . \end{cases}$$

Determinare esplicitamente due costanti del moto indipendenti (non banali).

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa monodimensionale di energia potenziale

$$V(x) = (2x^2 - x)e^{-x/2} .$$

Si richiede di:

- scrivere le equazioni del sistema dinamico associato;
- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;
- determinare l'insieme dei dati iniziali che originano orbite periodiche.

Esercizio 2. In un piano verticale, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere (senza attrito) lungo una circonferenza di raggio $R > 0$. Al punto P è appesa un'asta ideale di lunghezza $l > 0$ (con $l < R$), che reca all'altra estremità un punto Q di massa m . Il punto Q è collegato al centro della circonferenza tramite una molla di costante elastica $k > 0$.

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri del sistema;
- (iii) discutere la natura degli equilibri al variare dei parametri del sistema;
- (iv) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno di una posizione di equilibrio stabile e scrivere la soluzione linearizzata utilizzando i modi normali.

Esercizio 3. Si considerino due punti materiali di masse $m = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = \varrho^2 - \varrho^6$$

dove $\varrho = |r|$ e $r = r_1 - r_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del modulo del momento angolare $L \neq 0$, si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (ii) in tale sistema di riferimento, determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica nel piano $(\varrho, \dot{\varrho})$;
- (iv) determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.