

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 23 Gennaio 25 Gennaio 26 GennaioScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^2 . Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy) ,$$

è conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - y^2) , \\ \dot{y} = (1 - y^2)(y - x) . \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema. In particolare, sfruttando le zerocline, descrivere la dinamica corrispondente ai dati iniziali con $|y| < 1$;
- scrivere esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ corrispondente al dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

Esercizio 2. Si considerino tre punti materiali P , Q_1 e Q_2 vincolati a muoversi (senza attrito) lungo una linea retta. Il punto P ha massa M , mentre Q_1 e Q_2 hanno masse eguali e pari ad m , con $m < M$. I punti Q_1 e Q_2 sono collegati al punto P da due molle identiche di costanti elastiche $k > 0$ e lunghezze a riposo nulle. Sul sistema non agisce la forza peso. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare una costante del moto (indipendente dall'energia meccanica) in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (iii) in tale sistema di riferimento, determinare gli equilibri del sistema e determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno di una posizione di equilibrio stabile;
- (iv) descrivere il moto complessivo corrispondente alla posizione di equilibrio stabile nel sistema ridotto.

Esercizio 3. Si considerino due punti materiali di masse $m = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = k \left(\left(\frac{\xi}{\varrho} \right)^{12} - \left(\frac{\xi}{\varrho} \right)^6 \right),$$

dove k e ξ sono costanti positive, $\varrho = |r|$ e $r = r_1 - r_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del modulo del momento angolare $L \neq 0$, si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (ii) in tale sistema di riferimento, determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica nel piano $(\varrho, \dot{\varrho})$;
- (iv) determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.