

Nome :

Cognome :

Matricola :

 Prova intermedia di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo **chiaro** e ben **ordinato**, mettendo in evidenza i risultati ottenuti. Gli elaborati illeggibili non saranno corretti.
-

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x - y^2, \\ \dot{y} = y - y^3. \end{cases}$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e la loro natura;
- (ii) scrivere il flusso linearizzato attorno ad uno dei punti di equilibrio mediante l'esponenziale di matrice;
- (iii) determinare se uno dei punti di equilibrio è asintoticamente stabile (nel futuro o nel passato), esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov;
- (iv) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 + y^2 - 3). \end{cases}$$

Si richiede di:

- (i) determinare una costante del moto;
- (ii) determinare eventuali equilibri e la loro natura (non-lineare);
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche.

Osservazione. Per tracciare le curve di livello significative è bene fattorizzare la costante del moto **dopo** averla eguagliata al valore a cui si è interessati.

Osservazione. In generale può essere utile fattorizzare una quadrica nella forma $(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1)(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico monodimensionale che descrive un punto di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x(x^2 - 4)^3 .$$

Si richiede di:

- (i) scrivere l'equazione del moto (del secondo ordine), il sistema dinamico associato e mostrare l'esistenza di una costante del moto non banale;
- (ii) determinare eventuali equilibri e studiarne la natura (non-lineare);
- (iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase descrivendo dettagliatamente la dinamica del sistema;
- (iv) determinare la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno di un eventuale punto di equilibrio stabile.