

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 26 Giugno 27 Giugno 28 GiugnoScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
 - Chi vuole sfruttare il **bonus** compitino, **NON** deve svolgere l'**esercizio 1** e **DEVE** scrivere che usa il bonus compitino.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x^2y + 4y^3 - 10y, \\ \dot{y} = 16x - 16x^3 - 10xy^2. \end{cases}$$

Si richiede di:

- (i) determinare una costante del moto (non banale) per il sistema;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- (iii) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;
- (iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche, motivando la risposta.

Esercizio 2. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di masse uguali, m , vincolati a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. I punti P_1 e P_2 sono collegati con una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Inoltre i punti sono vincolati a muoversi su due rette passanti per l'origine, che formano tra loro un angolo α , fissato, la cui bisettrice risulta essere verticale.

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio del sistema, al variare del parametro α ;
- (iii) per $\alpha \neq 0, \pi$ determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno agli eventuali punti di equilibrio stabili e descrivere qualitativamente il moto del sistema linearizzato;
- (iv) discutere la dinamica del sistema per $\alpha = 0$ ed $\alpha = \pi$.

Esercizio 3. Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie toroidale di equazione

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2,$$

con $0 < r < R$. Sul sistema agisce la forza di gravità.

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare due costanti del moto e descrivere il moto qualitativo del sistema ridotto;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo;
- (iv) esistono punti di equilibrio stabili (secondo Lyapunov) per il sistema completo? Giustificare la risposta.