

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 17 Luglio 18 Luglio 19 LuglioScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
 - Chi vuole sfruttare il **bonus** competitivo, **NON** deve svolgere l'**esercizio 1** e **DEVE** scrivere che usa il bonus competitivo.
-

Esercizio 0. Si consideri un sistema di riferimento Oxy con \mathbf{i} e \mathbf{j} versori associati agli assi cartesiani. Determinare se la forza $\mathbf{F} = (2x^3y^4 + x)\mathbf{i} + (2x^4y^3 + y)\mathbf{j}$ è conservativa.

Sia γ la curva di equazione parametrica

$$(t \cos(\pi t) - 1)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

calcolare il lavoro compiuto dalla forza lungo tale cammino.

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y), \\ \dot{y} = y(4 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Si richiede di:

- (i) determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- (ii) tracciare il ritratto di fase, sfruttando le zerocline del sistema;
- (iii) determinare il comportamento *qualitativo* asintotico, per $t \rightarrow +\infty$, corrispondente alle seguenti condizioni iniziali, per $t = 0$:

$$(3, 3), \quad (-3, 1), \quad (-3, -3), \quad (3, -1).$$

- (iv) mostrare, esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov, l'esistenza di un punto asintoticamente stabile nel futuro.

Esercizio 2. Si considerino quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4 di masse uguali, m , vincolati a muoversi in un piano verticale Oxy , con y asse verticale ascendente. I quattro punti sono soggetti ad un dispositivo vincolare che soddisfa i seguenti requisiti: (i) i punti P_1 e P_3 sono vincolati a scorrere senza attrito lungo l'asse y ; (ii) i quattro punti occupano i vertici di un rombo ideale (dunque i punti possono attraversarsi) i cui lati $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$ sono costituiti da aste ideali di lunghezza $l = 1$. Il punto P_1 è collegato all'origine O con una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k_1 > 0$. Inoltre i punti P_2 e P_4 sono collegati tra loro da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k_2 > 0$.

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura, al variare dei parametri;
- (iii) per $mg > k_2$, determinare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno agli eventuali punti di equilibrio stabili;
- (iv) per $mg > k_2$, descrivere qualitativamente la dinamica dei singoli modi normali attorno agli eventuali punti di equilibrio stabili.

Esercizio 3. Un punto materiale P di massa m è vincolato alla superficie toroidale di equazione

$$\left(R - \sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 + y^2 = r^2,$$

con $0 < r < R$. Sul sistema agisce la forza di gravità.

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- (iii) determinare le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.
- (iv) determinare un dato iniziale che origina un'orbita periodica (che non sia un punto di equilibrio).