

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (scrivere i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) ... Settembre ... Settembre ... SettembreScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^2 . Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + 2xy, y + x^2 - y^2)$$

è conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + \alpha(x^3 + xy^2) , \\ \dot{y} = -x + y + \alpha(yx^2 + y^3) , \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e la loro natura al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (ii) scrivere il flusso linearizzato attorno all'origine $O = (0, 0)$ mediante l'esponenziale di matrice;
- (iii) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Nello spazio \mathbb{R}^3 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, con \mathbf{k} orientato lungo la verticale ascendente. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di eguale massa m , vincolati agli estremi di un'asta rigida ideale di lunghezza 2ℓ . Il centro dell'asta, G , è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio $R > \ell$ che giace nel piano orizzontale. I punti P_1 e P_2 sono collegati ai punti immateriali Q_1 e Q_2 , rispettivamente, da due molle di eguale costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. I punti Q_1 e Q_2 rappresentano le proiezioni di P_1 e P_2 sull'asse verticale. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare tre costanti del moto;
- (ii) utilizzando tali costanti del moto: si riduca il problema ad un problema unidimensionale;
- (iii) si tracci il ritratto di fase e si discuta qualitativamente la dinamica del suddetto problema unidimensionale;
- (iv) si determini una soluzione periodica per il sistema completo.

Esercizio 3. Si considerino due punti materiali di masse $m = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = \frac{\alpha}{\varrho} - \log \varrho, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

dove $\varrho = |r|$ e $r = r_1 - r_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del parametro α e del modulo del momento angolare $L \neq 0$, si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (ii) in tale sistema di riferimento, determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica nel piano $(\varrho, \dot{\varrho})$;
- (iv) determinare le orbite periodiche nel piano $(\varrho, \dot{\varrho})$;
- (v) determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.