

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (scrivere i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale) 22 Novembre 23 Novembre 24 NovembreScritto di **Fisica Matematica 1**

-
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 ed un generico punto $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Determinare se la forza $\mathbf{F} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})\mathbf{x}$ è una forza conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2xy - 1, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + 2xy - 1. \end{cases}$$

Si richiede di

- determinare i punti stazionari e la loro natura;
- scrivere il flusso linearizzato attorno al punto $(1, 0)$, mediante l'esponenziale di matrice;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema.

Esercizio 2. Nello spazio \mathbb{R}^2 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, con \mathbf{j} orientato lungo la verticale ascendente. Si considerino due punti pesanti P_1 e P_2 di masse uguali m . Il punto P_1 è vincolato a scorrere senza attrito lungo una retta orizzontale, mentre il punto P_2 è libero di muoversi nel piano verticale. I punti P_1 e P_2 sono collegati da una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto;
- (ii) determinare eventuali costanti del moto e darne una interpretazione fisica;
- (iii) determinare eventuali punti di equilibrio del sistema e studiarne la natura;
- (iv) risolvere esplicitamente le equazioni del moto.

Esercizio 3. Nello spazio \mathbb{R}^3 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, con \mathbf{k} orientato lungo la verticale ascendente. Si consideri un punto pesante P vincolato a muoversi (senza attrito) sulla superficie di un paraboloido di rotazione ad asse verticale, con la concavità rivolta verso l'alto. Una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto P al fuoco F del paraboloido. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio del sistema e studiarne la natura;
- (iii) determinare eventuali costanti del moto e descrivere qualitativamente il moto del sistema ridotto, tracciando il ritratto di fase (considerare anche il caso in cui la costante del moto sia nulla);
- (iv) descrivere qualitativamente il moto del sistema completo e determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.