

Nome : .....      Cognome : .....      Matricola : .....

Prove intermedia di **Fisica Matematica 1**  
05.05.2014

Versione B

Tempo a disposizione: **90 minuti**

---

Riportare NOME, COGNOME, MATRICOLA e VERSIONE del compito  
su **tutti** i fogli consegnati.

---

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y(x^2 + y^2 - 1) , \\ \dot{y} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) , \end{cases}$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e discuterne la stabilità;
- (ii) scrivere il flusso linearizzato per ciascuno degli equilibri trovati al punto (i), per il generico dato iniziale  $(x_0, y_0)$ ;
- (iii) tracciare il ritratto di fase e discutere la dinamica.

**Esercizio 2.** Sulla retta  $x \in \mathbb{R}$ , si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  soggetto ad una forza conservativa di potenziale

$$V(x) = \log(x^4 - 2x^2 + a) , \quad a > 1 \in \mathbb{R} .$$

Si richiede di

- (i) discutere in modo qualitativo il ritratto di fase al variare del parametro  $a$ ;
- (ii) considerando il dato iniziale  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$ , determinare il valore del parametro  $a$  in modo tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$ ;
- (iii) posto  $a = 6$ , verificare che il moto che fa seguito alle condizioni iniziali  $x(0) = 5/4$  e  $\dot{x}(0) = 0$  è periodico e si dia una stima del periodo  $T$  del moto nell'approssimazione armonica;
- (iv) dimostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono dei valori del parametro reale  $a$  tali che il sistema ammette orbite periodiche di periodo  $T < \varepsilon$ .