# 1

# 05.03.2014

**Queste note (attualmente, e probabilmente per un bel po') sono altamente provvisorie e (molto probabilmente) non prive di errori.**

## 1.1 L'equazione di Newton

L'equazione di Newton $F = ma$ per un sistema ad un grado di libertà, tipicamente un punto di massa $m$ su una retta, rappresenta in un certo senso il prototipo di *equazione differenziale ordinaria* (ODE).

L'incognita è rappresentata da una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (il *movimento*) che associa ad ogni istante $t$ la posizione $x = x(t)$ del punto. Denotiamo con $v(t) \equiv \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ la velocità e con $v(t) \equiv \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}(t) = \frac{d^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)$ l'accelerazione. L'equazione di Newton appare dunque come una equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \ . \tag{1.1}$$

Una funzione $x = x(t)$ è detta *soluzione* della (1.1) se si ha

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

per ogni tempo $t$.

## 1.2 Equazioni differenziali ordinarie: due semplici esempi

Consideriamo anzitutto due casi estremamente semplici

(i) $\dot{x} = f(t)$;

(ii) $\dot{x} = f(x)$.

Senza risolvere l'equazione differenziale, è possibile ricavare alcune informazioni importanti circa la dinamica del problema considerato: si vedano le figure 1.1 e 1.2, relative ai problemi (i) e (ii), rispettivamente.

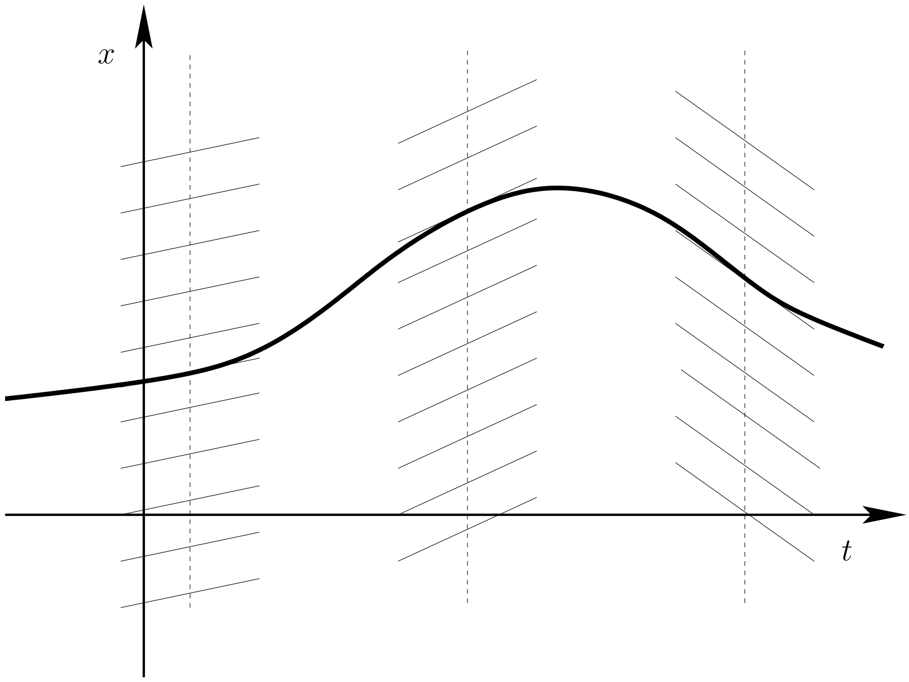


**Figura 1.1.** L'equazione differenziale $\dot{x} = f(t)$ determina nel piano $x, t$ un insieme di rette. La soluzione è una curva che in ogni punto $\big(t, x(t)\big)$ ha per tangente la retta passante per quel punto.

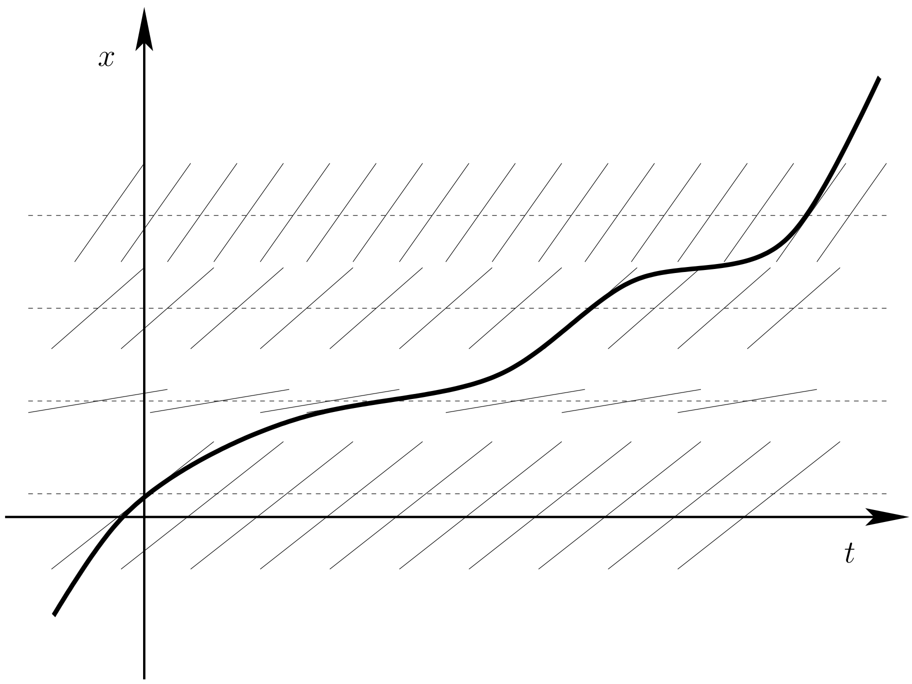


**Figura 1.2.** L'insieme delle rette tangenti per un'equazione della forma $\dot{x} = f(x)$, ed una possibile soluzione.

## 1.3 Sistemi autonomi

Consideriamo ora il caso di un sistema autonomo, ossia il sistema descritto dall'equazione

$$\dot{x} = f(x) \ .$$

**Lemma 1.1:** *Sia $f(\overline{x}) = 0$. Allora la funzione $x(t) = \overline{x}$ è una soluzione soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = \overline{x}$.*

Ad un punto $\overline{x}$ ove $f(x)$ si annulla daremo il nome di *punto di equilibrio*; alla soluzione $x(t) = \overline{x}$ daremo il nome di *soluzione stazionaria*, o anche *soluzione di equilibrio*. Sottolineiamo fin d'ora che la ricerca di equilibri costituisce il punto di partenza per lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali. Grazie al lemma che abbiamo appena visto ci è facile dimostrare la

**Proposizione 1.2:** *L'equazione $\dot{x} = f(x)$ ammette una soluzione stazionaria $x(t) = \overline{x}$ se e solo se $\overline{x}$ è un punto di equilibrio.*

## 1.4 Alcuni esempi di ODE di ordine 1

Riportiamo di seguito alcuni esempi elementari:

(i) $\dot{y} = c$, con $c \in \mathbb{R}$ (funzione lineare). La soluzione è $y(t) = ct + C$, dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

(ii) $\dot{y} = a(t)$, la cui soluzione è $y(t) = A(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$.

(iii) $\dot{y} = y$, la cui soluzione è $y(t) = Ce^t$, dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Il **problema di Cauchy**, definendo la condizione iniziale, toglie l'arbitrarietà della costante.

$$\begin{cases} \dot{y} = ty \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \log y(t) - \log(2) = \frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2e^{t^2/2}$$

## 1.5 L'equazione lineare

Consideriamo ora l'equazione lineare

$$\dot{y} = a(t)y + b(t) \ . \tag{1.2}$$

Ponendo $b = 0$ otteniamo l'equazione *omogenea associata* $y' = a(t)y$.

Chiaramente $y(t) = 0$ è una soluzione stazionaria. Se $y_0 \neq 0$ allora possiamo scrivere

$$\log|y| = \log|y_0| + \int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau \ ,$$

ricordando che $y$ e $y_0$ devono avere lo stesso segno. Otteniamo dunque la soluzione

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \ . \tag{1.3}$$

**Osservazione.** Siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni dell'equazione lineare omogenea in un intervallo $I$, è immediato verificare che una combinazione lineare di soluzioni è anch'essa soluzione. Sia $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$y' = \alpha y_1' + \beta y_2' = \alpha a(t) y_1 + \beta a(t) y_2 = a(t)(\alpha y_1 + \beta y_2) = a(t) y(t) \ .$$

Inoltre, siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni della (1.2), allora

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t) = a(t) y_2(t) + b(t) - a(t) y_1(t) - b(t) = a(t)(y_2(t) - y_1(t)) = a(t) y(t) \ .$$

Ogni soluzione dell'equazione non omogenea è somma di una soluzione dell'equazione omogenea associata e di una soluzione dell'equazione non omogenea. La differenza di due soluzioni dell'equazione non omogenea è soluzione dell'equazione omogenea associata. Questa è una struttura affine dell'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Veniamo ora all'equazione

$$y' = a(t) y + b(t) \ .$$

### *1.5.1 Metodo del fattore integrante*

Anzitutto consideriamo l'equazione

$$y' = ay + b(t) \ ,$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$y' - ay = b(t) \ ,$$

ed osserviamo che non è possibile integrare direttamente in quanto il membro di sinistra non è la derivata di una funzione nota. Moltiplichiamo ambo i membri per una funzione che la renda una derivata,

$$e^{-at}(y' - ay) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-at} y = e^{-at} b(t) \ .$$

Il fattore per cui moltiplico si chiama **fattore integrante**. Ora è banale risolvere l'equazione per integrazione

$$y = e^{at} \int e^{-at} b(t) \mathrm{d}t \ .$$

**Esercizio 1.1:** Risolvere l'equazione $x' = x - t$. Il fattore integrante è $e^{-t}$ e la famiglia delle soluzioni è data da

$$x(t) = t + 1 + c\, e^{-t} \ , \qquad (1.4)$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Per $t$ molto piccolo la soluzione si avvicina a $x = t + 1$, che è un asintoto per $t \to -\infty$. Per $t \to \infty$ l'evoluzione dipende dal valore della costante $c$: per $c = 0$ si ha una crescita lineare, mentre per $c > 0$ ($c < 0$) si ha crescita (decrescita) esponenziale. In figura 1.3 sono riportate alcune soluzioni. La

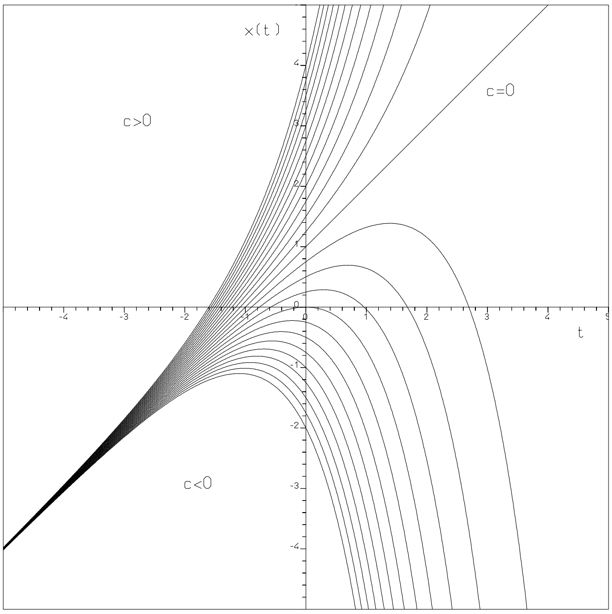


**Figura 1.3.** Grafico di alcune soluzioni dell'esercizio 1.1. Le soluzioni corrispondono a valori del parametro $c$ nell'intervallo $[-3, 3]$.

scelta delle condizioni iniziali determina l'evoluzione sia nel passato che nel futuro e mi permette di selezionare una curva.

**Osservazione.** L'equazione lineare omogenea associata a (1.4) è $x' = x$ la cui soluzione è $x(t) = c\,e^t$, mentre $x(t) = t + 1$ è una soluzione dell'equazione non omogenea. Quindi $x(t) = (t + 1) + (c\,e^t)$ è effettivamente somma di una soluzione dell'equazione omogenea e di una dell'equazione completa.

Torniamo al metodo del fattore integrante, trattando questa volta il caso generale, $y' = a(t)y + b(t)$, che riscriviamo nella forma

$$y' - a(t)y = b(t) \ .$$

In questo caso non riesco a dire quale sia il fattore integrante, quindi impongo l'uguaglianza

$$\mu(t)(y' - a(t)y) = \mu(t)b(t) \ ,$$

dove $\mu(t)$ è il fattore integrante ed impongo l'ulteriore condizione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)(y' - a(t)y) \ ,$$

da cui otteniamo

$$\mu' = -a(t)\mu \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \exp\left(-\int a(t)\mathrm{d}t\right) \ .$$

Sostituendo il tutto nell'equazione di partenza è immediato ottenere la soluzione

(1.5) $$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int b(t)\mu(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

**Esercizio 1.2:** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty + 1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*Soluzione*: $y(t) = e^{t^2} \int e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + c$, dove $c = y_0 e^{-t_0^2} - \int_0^{t_0} e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$ .

*1.5.2 Metodo della variazione delle costanti*

Consideriamo nuovamente l'equazione (1.2)

$$y' = a(t)y + b(t) \ .$$

Osserviamo che nella soluzione dell'equazione omogenea associata (1.3) compare la costante $x_0$. L'idea alla base del metodo della variazione delle costanti è proprio quella di sostituire la *costante* $x_0$ con una funzione del tempo $t$. Cerchiamo quindi una soluzione della forma

$$y(t) = u(t) \exp\left( \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \ , \tag{1.6}$$

con $u(t)$ funzione da determinare. Sostituendo questa espressione direttamente nell'equazione otteniamo

$$x' = (u' + ua(t)) \exp\left( \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \ ,$$

da cui ricaviamo la relazione

$$u' = b(t) \exp\left( - \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \ .$$

La soluzione si scrive

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} b(\tau) \exp\left( - \int_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\tau \ ,$$

e sostituendo nella (1.6) ritroviamo la soluzione (1.5) ottenute con il fattore integrante

## 1.6 L'equazione logistica

Il modello di crescita di popolazione più semplice è costituito dalla legge di Malthus: $x' = \lambda x$. La dinamica che ne risulta è la crescita esponenziale ($\lambda > 0$) o la decrescita esponenziale con conseguente estinzione ($\lambda < 0$).

Un modello un po' più complesso è rappresentato della cosiddetta *equazione logistica* (Verhulst),

$$x' = \lambda x (1 - \frac{x}{k}) \ .$$

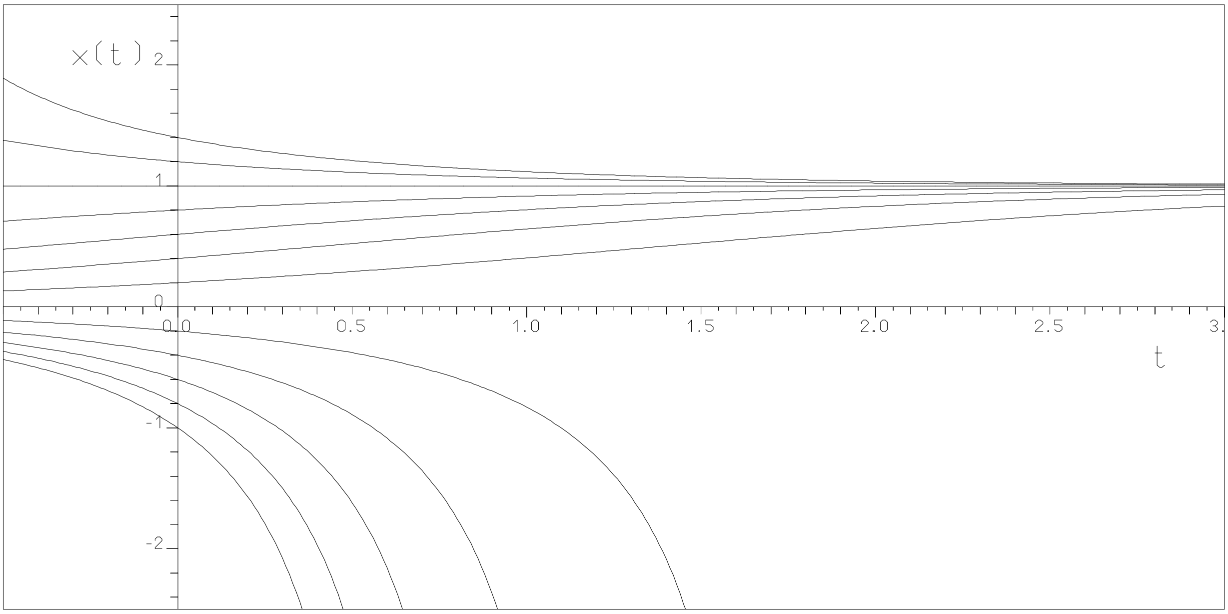


**Figura 1.4.** Grafico di alcune soluzioni dell'equazione logistica $x' = x(1-x)$.

Anzitutto osserviamo che $x = 0$ e $x = k$ sono soluzioni stazionarie. Se escludiamo le soluzioni stazionarie, possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{x'}{x(1-\frac{x}{k})} = \lambda$$

ed integrando otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x(1-\frac{x}{k})} = \lambda \int_0^t \mathrm{d}\tau \ .$$

dove abbiamo imposto la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Osservando che

$$\frac{1}{x(1-\frac{x}{k})} = \frac{1}{x} + \frac{1}{k-x} \ ,$$

abbiamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x(1-\frac{x}{k})} = \log\left|\frac{x}{k-x}\right| = \lambda t \ ,$$

e possiamo scrivere la soluzione

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda t}}{1 - \frac{x_0}{k} + \frac{x_0}{k} e^{\lambda t}} \ .$$

Nonostante la soluzione sia nota in forma esplicita, è interessante svolgere un'analisi qualitativa delle soluzioni. In questo caso naturalmente non otterremo informazioni aggiuntive, ma è interessante come caso esemplificativo che si rivelerà utile in casi più complessi.

Consideriamo per semplicità l'equazione $x' = x(1-x)$, del tutto equivalente al caso generale trattato sopra (esercizio).

Come abbiamo già osservato $x = 0$ e $x = 1$ sono le sole due soluzioni stazionarie. Per $x_0 < 0$, $x'(t) < 0$: $x(t) = 0$ per $t \to -\infty$ e $x(t) = -\infty$ per $t \to \infty$. Per $x_0 > 1$, $x'(t) < 0$: $x(t) = \infty$ per $t \to -\infty$ e $x(t) = 0$ per $t \to \infty$. Nell'intervallo $0 < x < 1$, $x' > 0$: $x(t) = 0$ per $t \to -\infty$ e $x(t) = 1$ per $t \to \infty$. Inoltre, ricordiamo che in virtú del teorema di esistenza ed unicità le soluzioni stazionarie non possono essere attraversate.

L'analisi qualitativa non ci permette di avere informazioni circa la scala dei tempi in cui ha luogo la dinamica. È naturale chiedersi se le orbite possano andare all'infinito (o provenire dall'infinito) in un tempo finito o meno.

Tuttavia, in questo caso, per valori di $|x|$ sufficientemente grandi, il comportamento di $x' = x(1-x)$ è dato dall'equazione $x' = -x^2$, che come sappiamo diverge su tempi finiti.

## 1.7 Sul prolungamento delle soluzioni (ultime pagine del Capitolo 2 delle note del Prof. Giorgilli)

**Teorema 1.3:** *Data la striscia $S = \mathbb{R}^n \times (t_1, t_2)$, sia $f : \overline{S} \to \mathbb{R}^n$ una funzione soddisfacente le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale con $\Omega = S$. Se inoltre esistono due costanti positive $M$ ed $N$ tali che*

$$|f(t,x)| \le M|x| + N \qquad \forall (x,t) \in S \ ,$$

*allora la soluzione $x$ è definita su tutto $(t_1, t_2)$ .*

Dunque la crescita ammissibile per il secondo membro (ferme restando le altre ipotesi) è al più lineare nella variabile $x$. Si dice in questo caso, che la funzione $f$ è *sublineare*. Un caso significativo che rientra sotto questa condizione è naturalmente quello in cui il secondo membro $f$ sia limitato.

**Proposizione 1.4:** *Se $f \in C^1(\overline{S}, \mathbb{R}^n)$ e tutte le derivate parziali di $f$ rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$ sono limitate in $\overline{S}$, allora $f$ è sublineare.*

Illustriamo l'applicazione del teorema della striscia con due esempi. Consideriamo per primo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = \sin\bigl[t(1 - x^2)\bigr] \ , \quad x(0) = x_0 \ ,$$

e mostriamo che ha soluzioni definite su tutto l'asse reale. Infatti il secondo membro è definito su ogni striscia $S = \mathbb{R} \times (t_1, t_2)$, dove soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale; inoltre è una funzione limitata su $\mathbb{R}^2$, e quindi soddisfa le ipotesi del teorema della striscia. Ne segue che la soluzione è definita su ogni intervallo $(t_1, t_2)$ contenente l'origine e quindi su tutto $\mathbb{R}$ .

Come secondo esempio consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = t^2 \exp(-t - x^2) \ , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

Anche in questo caso vale l'esistenza e l'unicità locale per ogni punto della striscia $S = \mathbb{R} \times (t_1, t_2)$. Inoltre

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \left|t^2 \exp(-t)\right| \left|2x \exp(-x^2)\right| \leq C\sqrt{\frac{2}{e}}$$

dove C è il massimo della funzione $h(t) = \left|t^2 \exp(-t)\right|$ sull'intervallo $[t_1, t_2]$, e $\sqrt{2/e}$ è il massimo su $\mathbb{R}$ della funzione $g(x) = \left|-2x \exp(-x^2)\right|$. Dunque il secondo membro dell'equazione differenziale è sublineare in ogni striscia $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$, e pertanto la soluzione esiste su tutto $\mathbb{R}$.

**Proposizione 1.5:** *Sia dato il problema di Cauchy*

$$\dot{x} = f(x, t) \ , \quad x(t_0) = x_0$$

*con $f$ definita in $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Valgano per esso le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale e sia $x$ la sua soluzione massimale. Allora se esistono costanti reali e positive tali che*

$$\left|x(t)\right| \leq C_1 + C_2(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_{\max})$$

*allora $t_{\max} = +\infty$.*

Il teorema ha come sua ipotesi fondamentale una cosiddetta *maggiorazione a priori*, cioè una informazione sulla crescita della soluzione indipendente dalla conoscenza della forma esplicita della soluzione medesima. Come sia possibile ottenere una tale informazione lo vediamo nel seguente esempio, con il quale siamo già familiari. Consideriamo il modello logistico, descritto dal problema di Cauchy

$$\dot{x} = x(1 - x) \ , \quad x(0) = x_0 \ .$$

Come sappiamo questa equazione ammette le due soluzioni costanti $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$. Consideriamo ora dati iniziali con $0 < x_0 < 1$ Per unicità, la soluzione del problema di Cauchy corrispondente a questi dati non può raggiungere le rette $x = 0$ e $x = 1$, e dunque è limitata. Perciò soddisfa le ipotesi del teorema precedente ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. Notiamo che in questo caso il secondo membro è quadratico e non potrebbe applicarsi il teorema della striscia.

Consideriamo infine il caso notevole dell'equazione di Newton per una particella puntiforme soggetta ad una forza conservativa. *Sia $x$ la posizione della particella e $V(x)$ l'energia potenziale corrispondente alla forza $F(x)$. Supporremo $V$ inferiormente limitata. Allora la soluzione dell'equazione di Newton*

$$m\ddot{x} = F(x) = -\nabla V(x)$$

*esiste per tutti i tempi.*

Ciò è conseguenza della conservazione dell'energia, di cui ci occuperemo in modo più esteso nei prossimi capitoli. Possiamo però anticipare l'informazione rilevante. L'energia

$$E = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}(t)\right]^2 + V(x(t))$$

si mantiene costante durante l'evoluzione del sistema. Di conseguenza, detto $\overline{V}$ l'estremo inferiore di $V(x)$, si ha

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{m}(E - \overline{V})} \ ,$$

e dunque

$$|x(t)| \leq |x_0| + (t - t_0)\sqrt{\frac{2}{m}(E - \overline{V})} \ .$$

**Esercizio 1.3:** Studiare le soluzioni corrispondenti ai seguenti potenziali:
(i) $V(x) = \lambda x^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
(ii) $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

## 1.8 Esempi classici

(i) Particella libera, $\ddot{x} = 0$. La soluzione è $x(t) = v_0 t + x_0$.
(ii) L'oscillatore armonico, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. La soluzione è

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \ ,$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \ ,$$
$$x(t) = ce^{i\omega t} + \bar{c}e^{-i\omega t} \ ,$$

dove $\bar{c}$ indica la coniugazione.
(iii) Il repulsore armonico, $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. La soluzione è

$$x(t) = a\cosh\omega t + b\sinh\omega t \ ,$$
$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \ ,$$

Queste equazioni sono lineari omogenee, quindi le soluzioni per il moto dei gravi, $\ddot{x} = -g$, e dell'oscillatore armonico pesante $\ddot{x} + \omega^2 x = -g$ hanno come soluzioni $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$ e $x(y) = A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2}$, rispettivamente.
(iv) Il pendolo, $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$. La soluzione richiede l'uso delle funzioni ellittiche.

Le equazioni tipiche che si incontrano in meccanica sono non lineari, e solo in qualche caso le loro soluzioni sono (in un qualche senso) approssimate dalle soluzioni delle corrispondenti equazioni lineari.
(v) La caduta frenata, $\ddot{x} + \beta\dot{x} = -g$. La cui soluzione è $x(t) = v_\infty t + ae^{-\beta t} + b$, dove $v_\infty = -\frac{g}{\beta}$ è la velocità asintotica.
(vi) L'oscillatore armonico smorzato, $\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$. La soluzione generale assume una forma differente secondo che si abbia piccolo smorzamento, $\mu < \omega$, o grande smorzamento, $\mu > \omega$. Nel primo caso si ha

$$x(t) = e^{-\mu t}(a\cos\sigma t + b\sin\sigma t) \ , \qquad \sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} > 0 \ ,$$

mentre per grande smorzamento si trova

$$x(t) = ae^{-\mu_1 t} + be^{-\mu_2 t} \ , \qquad \mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} > 0 \ .$$

Per $\mu = \omega$ si ha il cosiddetto smorzamento critico, e la soluzione è $(a + bt)e^{-\mu t}$.