2

12.03.2014

Queste note (attualmente, e probabilmente per un bel po') sono altamente provvisorie e (molto probabilmente) non prive di errori.

2.1 Osservazioni sull'esercitazione del 05.03.2014

2.1.1 *Equazione logistica*

Consideriamo l'equazione logistica nella forma, $\dot{x} = x(1-x)$. Nell'intervallo $(0,1)$ la derivata è strattamente crescente. Per la Proposizione 2.18 (vedi esercitazione del 06.03.2014) le orbite con dato iniziale compreso in tale intervallo sono confinate per sempre ed esistono per tutti i tempi. Inoltre tendono a 0 per $t \to infty$ e a 1 per $t \to \infty$.

2.1.2 *Potenziale inferiormente limitato*

Ricordiamo che se il potenziale $V(x)$ è inferiormente limitato, dalla conservazione dell'energia (e grazie alla Proposizione 2.18) sappiamo che la soluzione esiste per tutti i tempi.

Consideriamo un potenziale della forma $V(x) = \lambda x^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\alpha = 1$ corrisponde al potenziale Kepleriano). Il potenziale ha un minimo $x_{\min}$ e

$$\lim_{r \to 0^+} V(r) = +\infty, \qquad \lim_{r \to +\infty} V(r) = 0^- \ .$$

Segue che $\dot{r}_\infty = \sqrt{2E/m}$, ed il moto è asintoticamente uniforme nel futuro.

2.1.3 *Teorema 2.16* e *Proposizione 2.17*

Consideriamo $\dot{x} = (t-3)e^{-t-x^2}$ con dato iniziale $x_0 = -1$. Vale la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \big|(t-3)\exp(-t)\big| \, \big|2x\exp(-x^2)\big| \leq C\sqrt{\frac{2}{e}} \ ,$$

e la soluzione esiste per tutti i tempi.

Passiamo allo studio qualitativo della soluzione. Osserviamo che $t = 3$ è un punto stazionario: per $t < 3$ la funzione è decrescente e passa per -1 in $t = 0$ (dato iniziale), mentre per $t > 3$ crescente.

Come si comporta all'infinito? Separiamo le variabili ed integriamo

$$\begin{aligned}
\dot{x}e^{x^2} &= (t-3)e^{-t} \\
\int_{x(0)}^{x(t)} e^{\mu^2} \mathrm{d}\mu &= \int_0^t (s-3)e^{-s}\mathrm{d}s \\
\int_{-1}^{x(t)} e^{\mu^2} \mathrm{d}\mu &= (2-s)e^{-s}\Big|_0^t \; .
\end{aligned}$$

Nel passato otteniamo

$$\lim_{t\to-\infty} (2-t)e^{-t} - 2 = +\infty \; .$$

Nel futuro invece

$$\lim_{t\to+\infty} (2-t)e^{-t} - 2 = -2 \; ,$$

quindi il problema è di determinare x_∞ tale che

$$\int_{-1}^{x(t)} e^{\mu^2} \mathrm{d}\mu = -2 < 0 \; ,$$

dal quale ricaviamo l'informazione

$$x_{\min} \leq x_\infty < -1 \; .$$

Ricapitolando, la soluzione è illimitata (tende a $+\infty$) nel passato, e risulta limitata (tende a x_∞) nel futuro. Inoltre sappiamo che $x(0) = -1$ e presenta un minimo in $t = 3$.

2.2 Sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare nella forma

$$\dot{x} = Ax \; ,$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

Perchè studiare i sistemi lineari? Perchè, l'approssimazione linare permette di comprendere gli aspetti essenziali della dinamica del sistema non-lineare di partenza (e.g., in un intorno di un punto di equilibrio).

Consideriamo un sistema

$$\dot{x} = f(x) \; ,$$

e supponiamo di aver trovato un punto stazionario $\bar{x}$. Allora possiamo scrivere

$$f(x) - f(\bar{x}) = \mathrm{D}f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \mathscr{O}(|x - \bar{x}|) \; .$$

Ricordiamo che $\mathrm{D}f(\bar{x})$ è un operatore lineare quindi, trascurando i termini di ordine superiore, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-\bar{x}) = \mathrm{D}f(\bar{x})(x-\bar{x}) \ ,$$

che non è altro che un sistema lineare.

2.2.1 Esempi

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + y \\ \dot{y} = y - 3 \end{cases}$$

Anzitutto calcoliamo i punti di equilibrio

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y = 0 \\ \quad\quad y - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= (2,3) \ , \\ x_2 &= (-2,3) \ . \end{aligned}$$

La matrice Jacobiana del sistema è data da

$$\mathrm{D}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dunque abbiamo

$$\mathrm{D}f(x_1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D}f(x_2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed i corrispondenti sistemi linearizzati sono dati da

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \qquad \text{and} \qquad \dot{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \ .$$

Consideriamo l'equazione del pendolo $\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin\vartheta = 0$, che possiamo riscrivere come un sistema di due equazioni differenziali di ordine 1

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = -\omega^2 \sin\vartheta \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono ovviamente $x_1 = (0,0)$ e $x_2 = 0, \pi$. La matrice Jacobiana del sistema è data da

$$\mathrm{D}f(\varphi,\vartheta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

dunque abbiamo

$$\mathrm{D}f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D}f(0,\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

La linearizzazione attorno a x_1 è data dall'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \dot\vartheta = \varphi \\ \dot\varphi = -\omega^2\vartheta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot\vartheta + \omega^2\vartheta = 0 \ .$$

La linearizzazione attorno a x_2 è data dal repulsore armonico

$$\begin{cases} \dot\vartheta = \varphi \\ \dot\varphi = \omega^2\vartheta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot\vartheta - \omega^2\vartheta = 0 \ .$$

2.2.2 Diagonalizzazione

Cosideriamo anzitutto il caso più semplice in cui la matrice A sia diagonale

$$\dot x = Ax \ , \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \ ,$$

in questo caso la soluzione del sistema è banale

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix} y(0) \ .$$

Consideriamo ora un cambiamento di coordinate del tipo

$$y = Bx \ ,$$

possiamo scrivere il sistema di equazioni differenziali per y come segue

$$\dot y = B\dot x = BAx = BAB^{-1}y = \Lambda y,$$

dove $\Lambda = BAB^{-1}$. L'idea è che se *Lambda* risulta essere diagonale, allora so risolvere banalmente il problema nelle nuove coordinate! Domanda: esiste una matrice B tale che Λ sia diagonale? Sì, se A è diagonalizzabile.

Consideriamo il caso più semplice in cui la matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ha autovalori reali, distinti e non nulli, e denotiamo con v_1 e v_2 gli autovettori corrispondenti. Allora abbiamo $B = [v_1, v_2]$ e la dinamica nell'intorno del punto di equilibrio dipende solamente dal segno degli autovalori:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: nodo stabile;
(ii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: nodo instabile;
(iii) $\operatorname{sign}\lambda_1 \neq \operatorname{sign}\lambda_2$: sella.

2.2.3 Esempi

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{4}y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Poniamo quindi $\det(A - \lambda I) = 0$ e calcoliamo gli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1/4$. Il punto di equilibrio è un nodo stabile.

Calcoliamo ora gli autovettori corrispondenti. Tralasciamo il calcolo, che risulta essere banale:

(i) per λ_1 abbiamo $v_1 = (1, 0)$;
(ii) per λ_2 abbiamo $v_2 = (1, -3/4)$.

Ricordiamo che gli autovettori costituiscono delle direzioni invarianti, mentre le altre orbite sono tangenti all'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo minore. In questo caso $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ quindi saranno tangenti a v_2.

Ricaviamo esplicitamente l'equazione delle orbite eliminando il tempo.

$$x = e^{\lambda_1 t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda_1} \log x \ .$$

e sostituendo nell'equazione per y ottengo

$$y = e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_2/\lambda_1 \log x} = x^{\lambda_2/\lambda_1} \ .$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Poniamo quindi $\det(A - \lambda I) = 0$ e calcoliamo gli autovalori $\lambda_1 = 1 + 2i$ e $\lambda_2 = 1 - 2i$. Gli autovettori sono complessi, non esiste una matrice reale diagonale simile ad A, ma esiste una matrice standard simile ad A: la forma canonica di Jordan (versione reale).

Dati gli autovalori $\lambda = \alpha \pm i\beta$, voglio

$$A = B^{-1}CB \ , \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \ .$$

Risolviamo quindi il sistema simile, in forma normale.

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ z \end{pmatrix}$$

passiamo alle coordinate polari

$$\begin{cases} r^2 = \omega^2 + z^2 \\ \vartheta = \arctan \dfrac{z}{\omega} \end{cases}$$

e scriviamo le derivate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2 = 2r\dot{r} = 2\omega\dot{\omega} + 2z\dot{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tan\vartheta = (1+\tan^2\vartheta)\dot{\vartheta} = \frac{\dot{z}\omega - \dot{\omega}z}{\omega^2}$$

Risolvendo le equazioni precedenti rispetto a r e ϑ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\vartheta} = -\beta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} r(t) &= e^{\alpha t} r_0 \\ \vartheta(t) &= -\beta t + \vartheta_0 \end{aligned}$$

ed eliminando il tempo t otteniamo

$$r(\vartheta) = e^{\frac{\alpha}{\beta}(\vartheta - \vartheta_0)} r_0 \ .$$

La dinamica dipende quindi dal segno di α, la parte reale dell'autovettore:

(i) $\alpha < 0$: fuoco stabile;

(ii) $\alpha > 0$: fuoco instabile.

Per tornare alle coordinate di partenza osserviamo che B^{-1} si ottiene accostando la parte reale ed immaginaria degli autovettori. In questco caso particolare abbiamo

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Esercizio 2.1: Studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}(x-y)(1-x-y) \\ \dot{y} = x(2-y) \end{cases}$$

La linearizzazione è sempre attendibile? No, la parte reale degli autovettori deve essere diversa da zero. Vediamo un esempio in cui le cose non funzionano.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon x(x^2+y^2) \end{cases}$$

Il sistema linearizzato è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

L'origine è un punto di equilibrio e gli autovalori corrispondenti sono ovviamente $\lambda = \pm i$. Dunque, nell'approssimazione lineare, l'origine sembrerebbe essere un centro.

Torniamo al sistema di partenza ed introduciamo le coordinate polari

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \vartheta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

Ricaviamo quindi

$$\begin{cases} x\dot{x} = xy + \varepsilon x^2(x^2+y^2) \\ y\dot{y} = -xy + \varepsilon y^2(x^2+y^2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \varepsilon r^3$$

La dinamica dipende quindi dal segno di ε, per $\varepsilon > 0$ il punto viene respinto lontano, mentre per $\varepsilon < 0$ il punto viene atratto verso l'origine. Osserviamo come ε giochi un ruolo fondamentale nell'intorno dell'origine, ma non compaia nell'approssimazione lineare.

Il comportamento è simile a quello di un fuoco, ben diverso da quello di un centro ottenuto mediante l'approssimazione lineare!

Possiamo anche risolvere l'equazione in modo estremamente semplice

$$\int_{r_{t_0}}^{r_t} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu^3} = \varepsilon(t-t_0)$$

ed otteniamo

$$\frac{1}{r_t^2} = \frac{1}{r_{t_0}^2} + 2\varepsilon(t-t_0)$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon(t-t_0) + 1/r_{t_0}^2}}$$

Esercizio 2.2: Studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} = -x + y(x^2+y^2-1) \end{cases}$$