3

19.03.2014

Queste note (attualmente, e probabilmente per un bel po') sono altamente provvisorie e (molto probabilmente) non prive di errori.

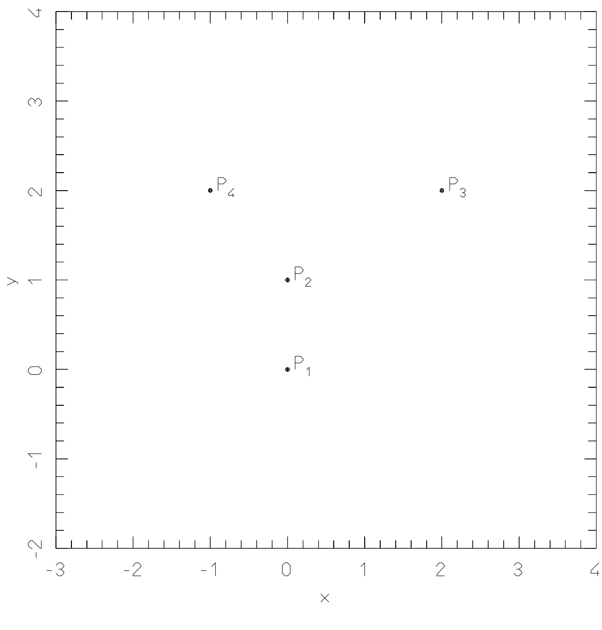
3.1 Esempio 1

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{3}(x-y)(1-x-y) = f_1(x,y) \\ \dot{y} = x(2-y) = f_2(x,y) \end{cases} .$$

3.1.1 Calcolo dei punti stazionari

I punti stazionari, i.e., i punti per i quali vale $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$, sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (2,2)$ e $P_4 = (-1,2)$.



3.1.2 Dinamica locale attorno ai punti di equilibrio

Anzitutto calcoliamo la matrice Jacobiana

$$\mathrm{D}f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(1-2x) & \frac{1}{3}(-1+2y)\\ 2-y & -x\end{pmatrix}$$

(i) $P_1=(0,0)$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\mathrm{D}f(0,0)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere

$$\lambda_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{23}{9}}\quad \text{e}\quad \lambda_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{23}{9}}$$

abbiamo quindi un fuoco instabile ($\mathrm{Re}(\lambda)>0$).

(ii) $P_2=(0,1)$

Anzitutto effettuiamo la traslazione

$$X=x-0\ ,\quad Y=y-1\ .$$

$$\begin{pmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere

$$\lambda_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{13}\quad \text{e}\quad \lambda_2=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{13}$$

abbiamo quindi un punto di sella e gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\ -2+\sqrt{13}\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad v_2=\begin{pmatrix}2\\ -2-\sqrt{13}\end{pmatrix}$$

(iii) $P_3=(2,2)$

Anzitutto effettuiamo la traslazione

$$X=x-2\ ,\quad Y=y-2\ .$$

$$\begin{pmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere

$$\lambda_1=-1\quad \text{e}\quad \lambda_2=-2$$

abbiamo quindi un nodo stabile e gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\ .$$

Osserviamo che $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ quindi le orbite sono tangenti all'autovettore v_1.

(iv) $P_3 = (-1, 2)$
Anzitutto effettuiamo la traslazione

$$X = x + 1 \ , \quad Y = y - 2 \ .$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1$$

abbiamo quindi un autovalore doppio e di conseguenza un nodo degenere instabile; l'autovettore corrispondente è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

3.1.3 Dinamica globale

L'analisi del comportamento **locale** nell'intorno dei punti di equilibrio è il punto di partenza per poter comprendere (qualitativamente) la dinamica globale del sistema non-lineare. Una trattazione completa di questo argomento esula dai contenuti di questo corso, e a maggior ragione di queste esercitazioni[1].

Tuttavia, per sistemi "semplici", uno studio qualitativo della dinamica globale pu'o essere effettuato utilizzando il metodo delle isocline. L'osservazione banale è che l'insieme dei punti

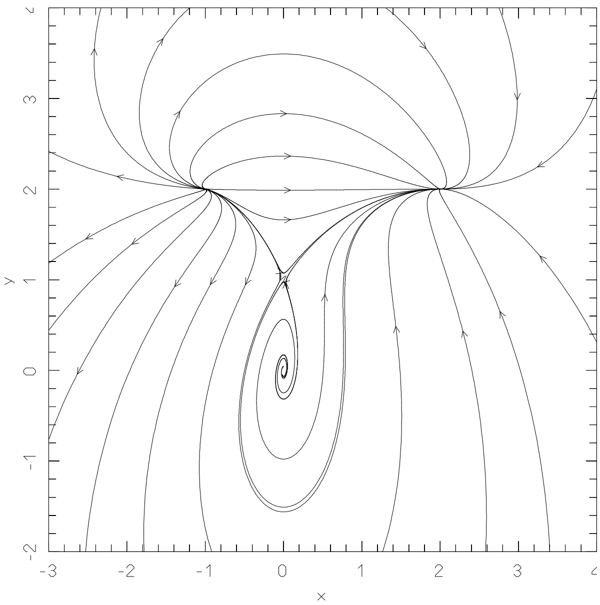
$$\{x, y \in \mathbb{R}^2 \ : \ \dot{x} = 0\} \ ,$$

divide il piano in due regioni (non necessariamente connesse), quella in cui $\dot{x} > 0$ e quella in cui $\dot{x} < 0$. Lo stesso vale ovviamente per l'insieme dei punti

$$\{x, y \in \mathbb{R}^2 \ : \ \dot{y} = 0\} \ .$$

Osserviamo che naturalmente i punti di intersezione corrispondono ai punti di equilibrio. In questo modo abbiamo ottenuto un'informazione circa il segno del campo vettoriale e di conseguenza la direzione delle orbite nelle varie regioni del piano deve soddisfare tali condizioni. Questo, unito al comportamento **locale** analizzato nel dettaglio in precedenza, ci permette di ottenere una descrizione qualitativa globale. Riportiamo nel grafico seguente alcune soluzioni del sistema

[1] Per i sistemi piani, la teoria di PoincaréBendixson descrive in modo completo tutte le possibili situazioni. Tale teoria viene approfondita nel corso di "Metodi e Modelli Matematici per le Applicazioni"



Esercizio 3.1: Studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}.$$

In particolare studiare le soluzioni stazionarie, periodiche e la loro natura. Inoltre stabilire se le soluzioni sono prolungabili e i comportamenti asintotici.
Suggerimenti: utilizzare le coordinate polari.

3.2 Il sistema Lotka-Volterra

Il cosiddetto modello preda-predatore, è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy = f_1(x, y) \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy = f_2(x, y) \end{cases},$$

con α, β, γ e δ parametri positivi.

3.2.1 Calcolo dei punti stazionari

I punti stazionari, i.e., i punti per i quali vale $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, sono $P_1 = (0, 0)$ (morte totale) e $P_2 = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ (vita all'equilibrio).

3.2.2 Dinamica locale attorno ai punti di equilibrio

Anzitutto calcoliamo la matrice Jacobiana

$$\mathrm{D}f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta y \end{pmatrix}$$

Segue immediatamente che nell'approssimazione lineare $P_1 = (0, 0)$ è un punto di sella, mentre $P_2 = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ è un centro (mostrare che è un centro anche per il sistema non-lineare).

3.2.3 Costanti del moto

Eliminando il tempo otteniamo

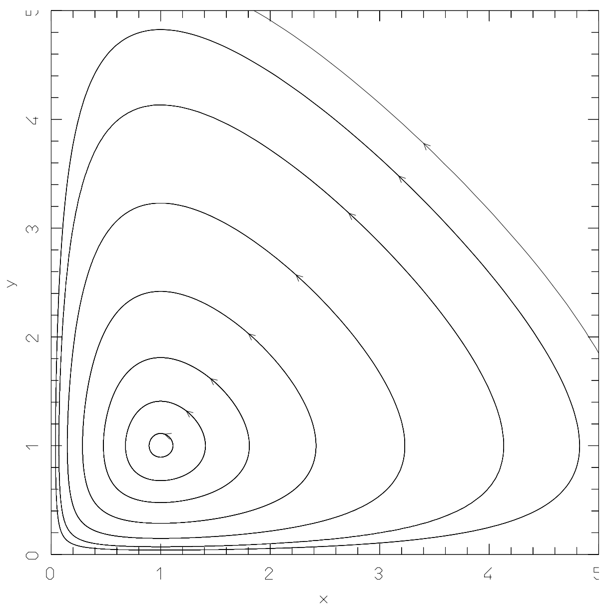
$$\frac{\alpha - \beta y}{y} \mathrm{d}y = \frac{\gamma - \delta x}{x} \mathrm{d}x \ ,$$

che si integra immediatamente.

Segue che la quantità

$$\Phi(x, y) = \alpha \log y - \beta y + \gamma \log x - \delta x$$

è una costante del moto (integrale primo). Le curve di livello sono riportate nel grafico sottostante, dove le frecce sono state ottenute direttamente dalla direzione del campo vettoriale in un punto.



Abbiamo quindi ottenuto una descrizione qualitativa della dinamica grazie alle curve di livello della funzione $\Phi(x, y)$. Per ottenere informazioni quantitative, che giustificano anche il nome di *integrale primo*, dobbiamo utilizzare il teorema della funziona implicita ed invertire rispetto al valore C che assume $\Phi(x, y)$ sulla curva di livello (vedi note del Prof. Giorgilli, capitolo 4).

3.2.4 Esponenziale di matrici

Esercizio 3.2: Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ ,$$

verificare che

$$\exp(tA) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Suggerimento: mostrare che

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \; .$$

Esercizio 3.3: Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

osserviamo che $A^2 = 0$ dunque il calcolo dell'esponenziale è banale,

$$\exp(tA) = \mathbb{1} + At = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Segue immediatamente che

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 + x_0 t \end{array} \; .$$

Esercizio 3.4: Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

osserviamo che $A^2 = \mathbb{1}$ da cui segue immediatamente che $A^{2n} = \mathbb{1}$ e $A^{2n+1} = A$. La soluzione $x(t)$ è quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) x_0 \\ &= \left(\sum_n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right) \mathbb{1} x_0 + \left(\sum_n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) A x_0 \\ &= \left(\begin{pmatrix} \cosh t & 0 \\ 0 \cosh t & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh t \\ \sinh t & 0 \end{pmatrix} \right) x_0 \; . \end{aligned}$$

Esercizio 3.5: Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

osserviamo che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

mentre $A^3 = 0$. La soluzione $x(t)$ è quindi

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left(1 + At + \frac{1}{2}A^2 t^t\right) x_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} x_0 \ .
\end{aligned}
$$