

# 4

26.03.2014

Queste note (attualmente, e probabilmente per un bel po') sono altamente provvisorie e (molto probabilmente) non prive di errori.

## 4.1 Stabilità asintotica: Lyapunov debole (KrasovskiiLaSalle)

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} .$$

con  $f(x) = -V'(x)$ . Se il potenziale ha un minimo isolato in  $x^*$  allora  $(x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$  è stabile per tutti i tempi.

È sufficiente considerare l'energia  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ , che ha ovviamente un minimo isolato in  $(x^*, 0)$  ed è una costante del moto. Questo basta per applicare il teorema di Lyapunov che stabilisce la stabilità perpetua.

Se aggiungiamo un termine dissipativo,  $\dot{E} \leq 0$ , naturalmente abbiamo la stabilità nel futuro, ma non siamo direttamente in grado di garantire la stabilità asintotica nel futuro.

**Esercizio 4.1:** Consideriamo un oscillatore armonico smorzato, descritto dalla seguente equazione

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad \mu > 0,$$

e scriviamo l'energia

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2),$$

dove abbiamo posto  $m = 1$  per comodità.

La derivata dell'energia è data da

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \omega^2x\dot{x} = (\ddot{x} + \omega^2x)\dot{x} = -2\mu\dot{x}^2 \leq 0,$$

ed osserviamo che  $\dot{E}$  si annulla su tutta la retta  $\dot{x} = 0$  e non soltanto nell'origine  $(0, 0)$ .

Modifichiamo l'energia ed utilizziamo come funzione di Lyapunov

$$\Phi = \frac{1}{2}(E + F), \quad F = \frac{1}{2}((\dot{x} + 2\mu x)^2 + \omega^2 x^2),$$

ed osserviamo che se  $\mu = 0$  allora  $\Phi = E$ , come ovviamente ci si aspetta. Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \dot{F} &= (\dot{x} + 2\mu x)(\ddot{x} + 2\mu\dot{x}) + \omega^2 x\dot{x} \\ &= (\dot{x} + 2\mu x)(-\omega^2 x) + \omega^2 x\dot{x} = -2\mu\omega^2 x^2, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\dot{\Phi} = -2\mu(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) < 0.$$

Abbiamo quindi ottenuto la asintotica stabilità. La prima domanda naturale è ovviamente, come abbiamo introdotto questa funzione  $F$ ? Purtroppo non esiste un algoritmo costruttivo per costruire una funzione di Lyapunov, ma in questo caso possiamo osservare che

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + 2\mu x) = -\omega^2 x,$$

ed introducendo la variabile ausiliaria

$$y = \frac{1}{\omega}(\dot{x} + 2\mu x).$$

È immediato verificare che per  $y$  vale la medesima equazione di  $x$

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

e che la sua energia coincide proprio con  $F$ .

**Osservazione.** È naturale chiedersi se sia davvero necessario ricorrere ad una tale costruzione per mostrare l'asintotica stabilità dell'oscillatore armonico smorzato (che sapevamo già essere asintoticamente stabile!).

È chiaro che in questo esempio, pur se in un particolare istante risulta  $x = 0$ , e quindi  $\dot{E} = 0$ , anche per  $x \neq 0$ , tuttavia immediatamente prima e dopo risulta  $\dot{E} \neq 0$ , perché tutte le orbite (ad eccezione del punto di equilibrio) attraversano trasversalmente la retta  $\dot{x} = 0$ , e quindi non possono restarvi indefinitamente. Questa argomentazione si può rendere rigorosa in condizioni del tutto generali, dando luogo ad una formulazione più debole del teorema di Ljapunov, in cui si sostituisce la condizione riguardante la derivata della funzione di Lyapunov (ipotesi (iii) nel teorema 3.8 delle note del Prof. Giorgilli) con la condizione più debole

(iii')  $(L_f \Phi)(x) \leq 0 \forall x \in U_0$  e l'insieme ove vale l'uguaglianza non contiene alcuna orbita completa, ad eccezione del punto stazionario  $\bar{x}$ .

## 4.2 Sulle funzioni di Lyapunov

(i)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

L'origine  $(0, 0)$  è l'unico punto stazionario, consideriamo come funzione di Lyapunov

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) ,$$

(verificare per esercizio che sia una buona funzione di Lyapunov!) ed osserviamo che

$$\dot{\Phi} = x_1(-x_1 + x_2^2) - x_2^2 = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2^2 < 0 ,$$

in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine (i termini quadratici dominano). Integrando esplicitamente otteniamo immediatamente

$$x_2(t) = e^{-t}x_2(0) ,$$

da cui ricaviamo

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + x_2(0) \int_0^t e^{-(t-s)}e^{-2s}ds = e^{-t}x_1(0) + x_2(0)^2(e^{-t} - e^{-2t}) ,$$

e quindi  $x(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . L'origine è asintoticamente stabile in senso globale.

(ii)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

L'origine  $(0, 0)$  è un punto stazionario, consideriamo come funzione di Lyapunov

$$\Phi(x) = ax_1^2 + bx_2^2 , \quad a, b > 0 ,$$

(verificare per esercizio che sia una buona funzione di Lyapunov!) ed osserviamo che

$$\dot{\Phi} = 2ax_1(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2bx_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) .$$

Ponendo  $a = b$  otteniamo

$$\dot{\Phi} = -2a(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) < 0$$

in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine. L'origine è quindi asintoticamente stabile. Ovviamente non può esserlo in senso globale, in quanto tutti i punti della circonferenza unitaria sono punti di equilibrio.

(iii)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 \end{cases}$$

L'origine  $(0, 0)$  è un punto stazionario, consideriamo come funzione di Lyapunov

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(ax_1^2 + bx_2^2) , \quad a, b > 0 ,$$

(verificare per esercizio che sia una buona funzione di Lyapunov!) ed osserviamo che

$$\dot{\Phi} = ax_1^2 + bx_1x_2 - bx_2^2 + ax_1^3x_2 .$$

Nell'intorno dell'origine naturalmente dominano i termini quadratici, e per garantire che  $\dot{\Phi} < 0$  è sufficiente che la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b/2 \\ -b/2 & b \end{pmatrix},$$

sia definita positiva, ovvero sia soddisfatta la condizione  $ab - b^2/4 > 0$  (e.g.,  $a = b = 1$ ). Concludiamo quindi che l'origine è un punto asintoticamente stabile. Naturalmente non è un attrattore globale in quanto anche  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  sono punti stazionari.

### 4.3 Il potenziale di Lennard-Jones

Consideriamo il potenziale di Lennard-Jones, utilizzato per descrivere l'interazione tra due atomi, ha la forma

$$V(r) = V_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right), \quad r > 0,$$

dove  $r$  indica la distanza, ed indicheremo con  $m$  la massa.

Iniziamo con il calcolare il punto di minimo,

$$\frac{d}{dr} V = V_0 \left( -12 \frac{r_0^{12}}{r^{13}} + 12 \frac{r_0^6}{r^7} \right),$$

da cui segue che  $V(r)$  ha un minimo in  $r = r_0$ . Calcoliamo la derivata seconda del potenziale

$$\frac{d^2}{dr^2} V = V_0 \left( 12 \cdot 13 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} + 12 \cdot 7 \frac{r_0^6}{r^8} \right),$$

che valutata nel punto di minimo vale  $V''(r_0) = 72V_0/r_0^2$ . Quindi l'approssimazione armonica per le frequenze delle piccole oscillazioni è data da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{72V_0}{mr_0^2}}.$$

### 4.4 Studio di un potenziale

Consideriamo il potenziale

$$V(x) = e^{-x^2}(x^2 + bx + c).$$

la cui derivata è

$$\begin{aligned} V'(x) &= e^{-x^2}(2x + b) - 2xe^{-x^2}(x^2 + bx + c) \\ &= e^{-x^2}(-2x^3 - 2bx^2 + (2 - 2c)x + b) \\ &= e^{-x^2}f(x). \end{aligned}$$

Per calcolare le soluzioni stazionarie dobbiamo porre  $V'(x) = 0$ , quindi avremo 1 o 3 soluzioni al variare dei parametri. Infatti le soluzioni di

$$f'(x) = -6x^2 - 4bx + 2 - 2c = 0 ,$$

sono

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 3 - 3c}}{-3} .$$

e in funzione del segno di  $b^2 + 3 - 3c$  avremo 1 o 3 soluzioni.

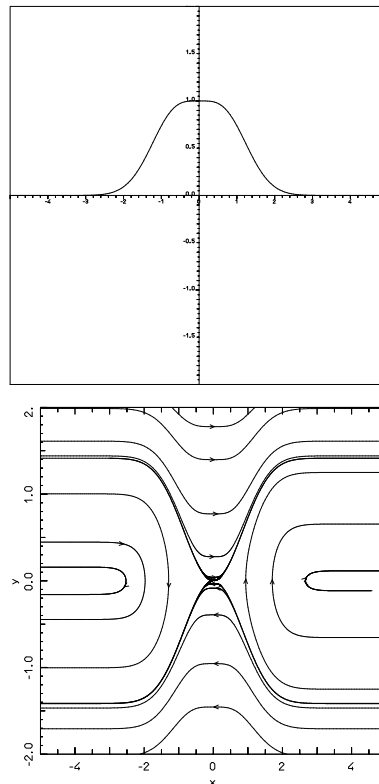
Lasciando per esercizio lo studio completo delle soluzioni al variare dei parametri, ci concentriamo ora su un caso particolare, corrispondente a  $b = 0$  e  $c = 1$ . Il potenziale assume allora la forma

$$V(x) = e^{-x^2}(x^2 + 1) ,$$

e la derivata

$$V'(x) = e^{-x^2}(-2x^3) .$$

Riportiamo di seguito il grafico del potenziale, e il relativo diagramma di fase



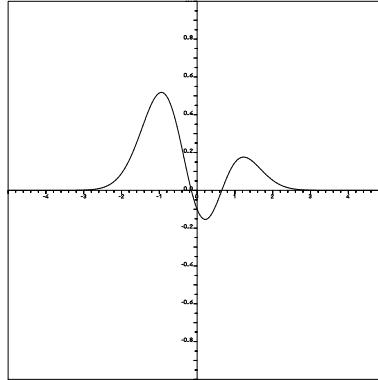
Osserviamo che per  $E \leq 0$  non è possibile alcun movimento. Per  $0 < E < V(0)$  abbiamo due regioni sconnesse: per  $x < 0$  tutte le orbite provengono da  $-\infty$ , raggiungono un valore massimo delle  $x$  (punto di inversione) e successivamente tornano a  $-\infty$ ; per  $x > 0$  la situazione è ribaltata, tutte le orbite provengono da  $+\infty$ , raggiungono un valore minimo delle  $x$  (punto di inversione) e successivamente tornano a  $+\infty$ . Per  $E = V(0)$  abbiamo 5 orbite, l'equilibrio che è costituito dall'origine  $(0, 0)$ , e le 4 separatrici. Per  $E > V(0)$  l'energia è sufficientemente alta: le orbite provenienti da  $-\infty$

vanno a  $+\infty$  e viceversa. È utile osservare che per  $x \rightarrow \infty$ ,  $V(x) = 0$ , quindi le orbite raggiungono una velocità limite

$$\dot{x}_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} .$$

Come esercizio, calcolare la pendenza delle separatrici.

Per completezza, riportiamo di seguito un caso in cui sono presenti 3 zeri, corrispondente alla scelta dei parametri  $b = -1/2$  e  $c = -0.1$ .



Per esercizio tracciare il diagramma di fase.

## 4.5 Biforcazioni

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x + \Omega^2 \sin x \cos x = -V'(x) ,$$

dove

$$V(x) = -\frac{g}{l} \cos x - \frac{\Omega^2}{2} \sin^2 x .$$

Una possibile realizzazione fisica di un tale sistema è data da un pendolo centrifugo, dove  $\Omega$  rappresenta la frequenza di rotazione dell'asse del pendolo.

I punti stazionari del sistema sono (restringendoci all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ )

$$x = 0 , \quad x = \pi \quad \text{e} \quad x = \pm \arccos \frac{g}{l\Omega^2} .$$

Naturalmente le ultime due soluzioni non esistono per ogni valore dei parametri, ma solamente per  $g/(l\Omega^2) \in [0, 1]$ .

Supponendo che  $g$  ed  $l$  siano fissate (fissiamo la lunghezza del pendolo), ci chiediamo cosa succeda al variare del parametro  $\Omega$ .

Per  $\Omega \leq \sqrt{g/l}$ , abbiamo due punti di equilibrio, il punto  $x = 0$  è stabile, mentre  $x = \pi$  è instabile. Per  $\Omega > \sqrt{g/l}$ , i punti di equilibrio sono quattro,  $x = \pi$  continua ad essere instabile ed anche  $x = 0$  diventa un punto instabile. I due nuovi punti di equilibrio risultano invece essere stabili. Questo è un tipico esempio di biforcazione a forchetta.

**Esercizio 4.2:** Studiare l'equazione

$$\ddot{x} = -\sin x + \beta ,$$

al variare del parametro  $\beta$ .

## 4.6 Potenziale con flesso a tangente orizzontale

Studiamo il potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{1-x^4} .$$

Anzitutto osserviamo che  $V(x) = -V(-x)$  e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0 .$$

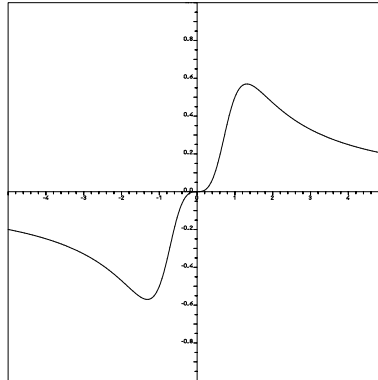
Le derivata del potenziale

$$V'(x) = \frac{x^2(3-x^4)}{(1+x^4)^2} ,$$

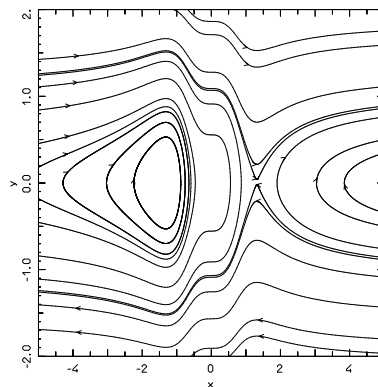
si annulla nei punti

$$x = -\sqrt[4]{3} , \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \sqrt[4]{3} .$$

Riportiamo di seguito il grafico del potenziale



e il corrispondente ritratto di fase



Calcoliamo il periodo delle piccole oscillazioni nell'intorno dell'equilibrio stabile  $\bar{x} = -\sqrt[4]{3}$ . In un intorno di  $\bar{x}$  possiamo approssimare il potenziale come

$$V(x) \sim V(\bar{x}) + \frac{1}{2}V''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 .$$

ed otteniamo

$$\omega^2 = \frac{V''(\bar{x})}{m} , \quad V''(\bar{x}) = \frac{3\sqrt[4]{3}}{4} ,$$

da cui otteniamo immediatamente

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Infine, analizziamo il punto di flesso, ricordiamo che vale

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} ,$$

ed osserviamo che nell'intorno dell'origine, vale l'approssimazione

$$V(x) \sim \frac{1}{3!}V'''(0)x^3 .$$

Consideriamo quindi la quantità

$$\int_{x_0}^{x_t} \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\mu))}} = t - t_0 ,$$

poichè  $V(x) \sim x^3$ , l'integrale è divergente. Attorno all'equilibrio, il sistema si comporta come il sistema linearizzato e le tangenti sono gli autovettori (calcolarli per esercizio).

Osserviamo inoltre che il valore limite della velocità tende ad una costante

$$v_\infty = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} .$$