5

02.04.2014

Queste note (attualmente, e probabilmente per un bel po') sono altamente provvisorie e (molto probabilmente) non prive di errori.

5.1 Esercizio 1

Studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} .$$

In particolare studiare le soluzioni stazionarie, periodiche e la loro natura. Inoltre stabilire se le soluzioni sono prolungabili e i comportamenti asintotici.

Anzitutto passiamo alle coordinate polari

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \quad \tan\vartheta = \frac{y}{x} \ ,$$

ed osserviamo che valgono le relazioni

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \ , \quad \dot{\vartheta}(1 + \tan^2\vartheta) = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \ .$$

Utilizzando queste relazioni otteniamo immediatamente

$$\dot{r} = r(r^2 - 1) \ , \quad \dot{\vartheta} = 1 \ .$$

Osserviamo che $r = 0$ ed $r = 1$ sono soluzioni costanti (per r), ma ricordiamo che $r = 0$ è un punto singolare. Sostituiamo direttamente $x = y = 0$ nel sistema originale e verifichiamo che effettivamente l'origine $(0, 0)$ è un punto stazionario.

L'altra soluzione costante, $r = 1$, in realtà non è una soluzione del sistema di partenza, infatti osserviamo che la soluzione completa è data da

$$r_t = 1 \ , \quad \vartheta_t = \vartheta_0 + t \ ,$$

che non è un punto stazionario, bensì una soluzione periodica.

Il semplice studio del segno della derivata (di r) ci permette di concludere che $r = 1$ è instabile, mentre $r = 0$ è stabile.

Linearizziamo in un intorno dell'origine

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x \\ \dot{y} = x - y \end{cases} .$$

e troviamo gli autovalori $\lambda = -1 \pm i$. L'origine è dunque un fuoco stabile.

Integriamo ora l'equazione per r

$$\frac{\dot{r}}{r(r^2-1)} = 1$$

ed otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{r}(s)\mathrm{d}s}{r(s)(r^2(s)-1)} \int_0^{r_t} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(\mu^2-1)} = t - t_0 \ .$$

Integrando esplicitamente otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\frac{(r+1)(r-1)}{r^2} - \frac{1}{2}\log\frac{(r_0+1)(r_0-1)}{r_0^2} = t - t_0$$

da cui segue

$$\frac{(r+1)(r-1)}{r^2} = e^{2(c+t-t_0)}$$

dove $c = -\frac{1}{2}\log\frac{(r_0+1)(r_0-1)}{r_0^2}$. La soluzione è data da

$$r_t = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2(c+t-t_0)}}} \ .$$

Osserviamo che per $t \to infty$ abbiamo $r = 1$, mentre in un tempo finito nel futuro la soluzione rsulta essere divergente (perchè?). Infine, notiamo che poichè la soluzione (per r) diverge in un tempo finito, l'angolo ϑ deve necessariamente convergere (in un tempo finito), da cui otteniamo un'informazione essenziale per la dinamica globale. Tutte le orbite con dato $r > 1$, divergono in un tempo finito e non possono superare un certo valore dell'angolo $\overline{\vartheta}$, che dipende dalle condizioni iniziali.

Esercizio 5.1: Studiare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2+y^2-1) + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \\ \dot{y} = -x(x^2+y^2-1) + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \end{cases} .$$

5.2 Esempio 2

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy = f_1(x,y) \\ \dot{y} = -y^2 + 1 + 3x^2 = f_2(x,y) \end{cases} .$$

Studiare la natura dei puti di equilibrio, scrivere l'equazione delle orbite e risolverla.

5.2.1 *Calcolo dei punti stazionari*

I punti stazionari, i.e., i punti per i quali vale $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$, sono $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$, $P_3 = (1/\sqrt{3},0)$ e $P_4 = (-1/\sqrt{3},0)$.

5.2.2 *Dinamica locale attorno ai punti di equilibrio*

Anzitutto calcoliamo la matrice Jacobiana

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -6x & -2y \end{pmatrix}$$

(i) $P_1 = (0,0)$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, punto di sella.

(ii) $P_2 = (0,-1)$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$, punto di sella.

(iii) $P_3 = (1/\sqrt{3},0)$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$, centro.

(iv) $P_4 = (-1/\sqrt{3},0)$

Gli autovalori del sistema linearizzato risultano essere $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$, centro.

Osserviamo che per i punti di sella la linearizzazione è atendibile, mentre per i punti di centro, la linearizzazione non è attendibile. Verificare se i centri restano centri anche per il sistema non-lineare e calcolare le direzioni delle separatrici dei punti di sella.

Per l'equazione delle orbite, dobbiamo eliminare il tempo e trovare una relazione tra x e y.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2x}y + \frac{1-3x^2}{2x}y^{-1} \ ,$$

è un'equazione di Bernoulli, introduciamo dunque $u = y^2$ e calcoliamo

$$u' = -\frac{1}{x}u + \frac{1-3x^2}{x} \ ,$$

che integriamo immediatamente ottenendo

$$u = 1 - x^2 + \frac{c}{x} \ ,$$

ovvero

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2 + \frac{c}{x}} \ ,$$

dove dovrò prendere la soluzione positiva se il dato iniziale è positivo e viceversa.

Infine osserviamo che $x(x^2+y^2-1) = c$ è una costan te del moto per il sistema.

5.3 Esempio 3

Consideriamo un potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2 \ .$$

tracciare il grafico del potenziale e il relativo ritratto di fase per esercizio.

La derivata del potenziale $V'(x)$ si annulla nei punti $x = -2$ e $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$.

Per $E = 0$ i soli moti ammissibili sono l'orbita stazionaria $x = -2$ e l'orbita periodica che oscilla attorno al punto $\overline{x} = (-1 + \sqrt{3})/2$. I punti di inversione sono $x = \pm 1$ e ricordiamo che

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} = \sqrt{-\frac{2}{m}V(x)} \ .$$

Per calcolare il periodo di oscillazione, osserviamo che

$$T = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{-\frac{2}{m}V(\mu)}} \ .$$

Nell'approssimazione armonica

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{V''(\overline{x})}} \ .$$

5.4 Esempio 4

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\sin x + \beta = -V'(x) \ , \quad V(x) = -\cos x - \beta x \ .$$

Osserviamo anzitutto che il potenziale non è periodico in x, ma lo è la sua derivata!

I punti critici sono i punti che soddisfano $\sin x = \beta$, che ovviamente ha soluzione solamente se $|\beta| \leq 1$. Per $\beta = 0$ abbiamo esattamente l'equazione del pendolo, che abbiamo già esaminato in passato.

Se $|\beta| > 1$, il potenziale è una curva ondulata senza massimi o minimi, per un fissato valore di energia le orbite provenienti da $+\infty$ descrescono sino a raggiungere un valore di inversione e tornano a $+\infty$. Per esercizio tracciare il diagramma di fase.

Se $0 < \beta < 1$ (il caso $0 > -\beta > -1$ è analogo) i punti di massimo e minimo del potenziale si alternano periodicamente. Si creano un'infinità di orbite chiuse, attorno ai punti di equilibrio stabili. Attorno ai punti di massimo la dinamica locale è descritta da un punto di sella, in cui la separatrice alla sinistra del punto di equilibrio instabile si richiude su se stessa a mo di cappio. Per esercizio tracciare il diagramma di fase completo.

Il calcolo del periodo, nell'approssimazione armonica, attorno ai punti di equilibrio (quandi esistono) non presenta particolari difficoltà. Detto $\overline{x} = \arcsin\beta$

$$V''(\overline{x}) = \sqrt{1 - \beta^2} \ ,$$

segue

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{1-\beta^2}}\ .$$

In generale il potenziale si comporta come la somma di una forza costante e di un pendolo. Osserviamo che se $\beta >> 1$, $V(x)$ è analogo a quello di una forza costante, come la forza peso, e la dinamica del pendolo risulta essere trascurabile.