

Risultati sulla stabilità per problemi planetari con più di tre corpi

Marco Sansottera ^[a]

*Basato su un lavoro di ricerca in collaborazione con
Antonio Giorgilli ^[a] e Ugo Locatelli ^[b]*

^[a]Dip. Mat. dell'Università degli Studi di Milano

^[b]Dip. Mat. dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Assemblea Scientifica G.N.F.M., Montecatini Terme, 1–3 Ottobre 2009

PRIN 2007B3RB3EY Dyn. Sys. & Appl.

Il sistema solare. . .

Domande:

Il sistema solare è stabile?

I teoremi di Kolmogorov (1954) e di Nekhoroshev (1977) possono dirci qualcosa di interessante sulla stabilità dei sistemi planetari?

Il sistema solare. . .

Domande:

Il sistema solare è stabile?

I teoremi di Kolmogorov (1954) e di Nekhoroshev (1977) possono dirci qualcosa di interessante sulla stabilità dei sistemi planetari?

Problemi affrontati:

Il problema completo per il sistema Sole–Giove–Saturno (SJS).

Il problema piano per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano.

Il sistema solare. . .

Domande:

Il sistema solare è stabile?

I teoremi di Kolmogorov (1954) e di Nekhoroshev (1977) possono dirci qualcosa di interessante sulla stabilità dei sistemi planetari?

Problemi affrontati:

Il problema completo per il sistema Sole–Giove–Saturno (SJS).

Il problema piano per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano.

Risposte:

Il teorema di Kolmogorov (KAM) è stato applicato con successo al problema SJS (L.&G. 2007).

Abbiamo applicato le stime esponenziali di tipo Nekhoroshev sui tempi di stabilità in un intorno del toro KAM per il sistema SJS (G.,L.&S. 2009).

Studio del problema secolare per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano.

Caos nel sistema Sole–Giove–Saturno–Urano–Nettuno

Sussman & Wisdom (*Science*, 1992)

- il sistema dei pianeti giganti (SJSUN) è **debolmente caotico**,
- piccole variazioni delle condizioni iniziali originano moti quasi-periodici.

Murray & Holman (*Science*, 1999) *sovrapposizione di risonanze triple*

- il semiasse maggiore di Urano è molto vicino al centro di un *cluster* di risonanze del tipo:

$$3n_J - 5n_S - 7n_U + [(3 - j)g_J + 6g_S + jg_U] \quad \text{con } j = 0, 1, 2, 3,$$

dove n è il moto medio e g l'argomento del perielio,

- la presenza di un *cluster* di risonanze “generato” dalla risonanza di moto medio $(3, -5, -7)$, alcune delle quali includono anche frequenze relative alla longitudine dei nodi.

Dinamica dei sistemi SJSUN e SJSU

La risonanza di moto medio $(3, -5, -7)$ è molto importante a causa della vicinanza di Saturno alla celebre risonanza $5 : 2$ con Giove e di Urano alla $7 : 1$. Inoltre $2n_J - 5n_S \simeq 7n_U - n_J$.

M.&H. hanno stimato il tempo T_{es} necessario ad Urano per essere espulso ottenendo $T_{es} \sim 10^{18}$ anni.

Risultati (ottenuti con simulazioni numeriche):

Per valori di a_U (semiasse maggiore di Urano) nell'intervallo 19.18 e 19.35 AU, alcune regioni presentano moti quasi-periodici (cioè con tempi di Lyap. $> 10^8$), mentre altre regioni sono caotiche a causa dell'effetto di "cluster" di risonanze triple.

Lo stesso risultato (*qualitativamente*) è *valido* sia *nel caso piano*, sia *rimuovendo Nettuno*, ma non è stata rilevata la presenza di alcun moto caotico *nel caso piano senza Nettuno*.

Forme normali per i sistemi SJSU e SJSUN

Domanda:

Come affrontare il problema Sole–Giove–Saturno–Urano alla luce dei precedenti lavori sul sistema SJS?

R.: Dobbiamo trattare *la parte secolare dell'Hamiltoniana* con estrema attenzione, effettuando una trasformazione preliminare “alla Kolmogorov” per ridurre la componente principale della perturbazione che dipende dagli angoli veloci.

Forme normali per i sistemi SJSU e SJSUN

Domanda:

Come affrontare il problema Sole–Giove–Saturno–Urano alla luce dei precedenti lavori sul sistema SJS?

R.: Dobbiamo trattare *la parte secolare dell'Hamiltoniana* con estrema attenzione, effettuando una trasformazione preliminare “alla Kolmogorov” per ridurre la componente principale della perturbazione che dipende dagli angoli veloci.

Le possibili strategie (avendo aggiunto, almeno, Urano):

Sembra naturale applicare le stime dei tempi di stabilità sulle forme normali di Birkhoff:

Forme normali per i sistemi SJSU e SJSUN

Domanda:

Come affrontare il problema Sole–Giove–Saturno–Urano alla luce dei precedenti lavori sul sistema SJS?

R.: Dobbiamo trattare *la parte secolare dell'Hamiltoniana* con estrema attenzione, effettuando una trasformazione preliminare “alla Kolmogorov” per ridurre la componente principale della perturbazione che dipende dagli angoli veloci.

Le possibili strategie (avendo aggiunto, almeno, Urano):

Sembra naturale applicare le stime dei tempi di stabilità sulle forme normali di Birkhoff:

- 1 dopo aver mediato rispetto agli angoli di moto medio ed aver eliminato i termini perturbativi secolari di ordine superiore a 2 nelle eccentricità e inclinazioni;

Forme normali per i sistemi SJSU e SJSUN

Domanda:

Come affrontare il problema Sole–Giove–Saturno–Urano alla luce dei precedenti lavori sul sistema SJS?

R.: Dobbiamo trattare *la parte secolare dell'Hamiltoniana* con estrema attenzione, effettuando una trasformazione preliminare “alla Kolmogorov” per ridurre la componente principale della perturbazione che dipende dagli angoli veloci.

Le possibili strategie (avendo aggiunto, almeno, Urano):

Sembra naturale applicare le stime dei tempi di stabilità sulle forme normali di Birkhoff:

- 1 dopo aver mediato rispetto agli angoli di moto medio ed aver eliminato i termini perturbativi secolari di ordine superiore a 2 nelle eccentricità e inclinazioni;
- 2 in un intorno di un toro KAM (G.,L.&S., *CMDA.*, 2009).

Forme normali per i sistemi SJSU e SJSUN

Domanda:

Come affrontare il problema Sole–Giove–Saturno–Urano alla luce dei precedenti lavori sul sistema SJS?

R.: Dobbiamo trattare *la parte secolare dell'Hamiltoniana* con estrema attenzione, effettuando una trasformazione preliminare “alla Kolmogorov” per ridurre la componente principale della perturbazione che dipende dagli angoli veloci.

Le possibili strategie (avendo aggiunto, almeno, Urano):

Sembra naturale applicare le stime dei tempi di stabilità sulle forme normali di Birkhoff:

- ① dopo aver mediato rispetto agli angoli di moto medio ed aver eliminato i termini perturbativi secolari di ordine superiore a 2 nelle eccentricità e inclinazioni;
- ② in un intorno di un toro ellittico;
- ③ in un intorno di un toro KAM (G.,L.&S., *CMDA.*, 2009).

Applicazione al sistema SJSU nel piano

- Il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano (SJSU) nel **piano**.
- Elevato costo computazionale nel passo “alla Kolmogorov”.
- **Non** effettuiamo la riduzione del momento angolare.
- Sviluppo in serie dell'Hamiltoniana utilizzando un manipolatore algebrico.
- Studio della dinamica secolare.
- Stima del “tempo di stabilità”.

L'Hamiltoniana di un sistema planetario

L'Hamiltoniana è

$$F(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) = T^{(0)}(\tilde{\mathbf{r}}) + U^{(0)}(\mathbf{r}) + T^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}) + U^{(1)}(\mathbf{r}),$$

dove \mathbf{r} sono le coordinate eliocentriche e $\tilde{\mathbf{r}}$ i momenti coniugati.

$$T^{(0)}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\mathbf{r}}_j\|^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_j} \right),$$

$$U^{(0)}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^3 \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|},$$

$$T^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_3}{m_0} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_3}{m_0},$$

$$U^{(1)}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \left(\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} + \frac{m_1 m_3}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|} + \frac{m_2 m_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|} \right).$$

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

variabili veloci

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

variabili veloci

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

variabili secolari

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

L'Hamiltoniana nelle variabili di Poincaré

L'Hamiltoniana, scritta nelle variabili di Poincaré, diventa

$$F = F_0 + F_1 = F_0 + U^{(1)} + T^{(1)} .$$

$$F_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2} \quad \text{parte integrabile ,}$$

$$U^{(1)} = -G \sum_{0 < i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad \text{perturbazione (termine principale) ,}$$

$$T^{(1)} = \sum_{0 < i < j} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j}{m_0} \quad \text{perturbazione (termine complementare) .}$$

Dobbiamo sviluppare tutti i termini in serie di potenze!

Come sviluppare l'Hamiltoniana

- 1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana è un problema classico.
- 2 Scegliamo un valore Λ^* tale che

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle_\lambda}{\partial \Lambda_j} \right|_{\substack{\Lambda = \Lambda^* \\ \xi = \eta = 0}} = n_j^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $\langle \cdot \rangle_\lambda$ indica la media sugli angoli veloci,
 - n_j^* sono le frequenze fondamentali di moto medio.
- 3 Introduciamo le nuove azioni $L_j = \Lambda_j - \Lambda_j^*$.
 - 4 Effettuiamo una trasformazione canonica \mathcal{T}_F che trasla le azioni veloci.
 - 5 Sviluppiamo l'Hamiltoniana in serie di potenze di \mathbf{L} , $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e in serie di Fourier di $\boldsymbol{\lambda}$.

Come sviluppare l'Hamiltoniana

- 1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana è un problema classico.
- 2 Scegliamo un valore Λ^* tale che

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle_\lambda}{\partial \Lambda_j} \right|_{\substack{\Lambda = \Lambda^* \\ \xi = \eta = 0}} = n_j^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $\langle \cdot \rangle_\lambda$ indica la media sugli angoli veloci,
 - n_j^* sono le frequenze fondamentali di moto medio.
- 3 Introduciamo le nuove azioni $L_j = \Lambda_j - \Lambda_j^*$.
 - 4 Effettuiamo una trasformazione canonica \mathcal{T}_F che trasla le azioni veloci.
 - 5 Sviluppiamo l'Hamiltoniana in serie di potenze di \mathbf{L} , $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e in serie di Fourier di $\boldsymbol{\lambda}$.

Come sviluppare l'Hamiltoniana

- 1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana è un problema classico.
- 2 Scegliamo un valore Λ^* tale che

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle_\lambda}{\partial \Lambda_j} \right|_{\substack{\Lambda = \Lambda^* \\ \xi = \eta = 0}} = n_j^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $\langle \cdot \rangle_\lambda$ indica la media sugli angoli veloci,
 - n_j^* sono le frequenze fondamentali di moto medio.
- 3 **Introduciamo le nuove azioni $L_j = \Lambda_j - \Lambda_j^*$.**
 - 4 Effettuiamo una trasformazione canonica \mathcal{T}_F che trasla le azioni veloci.
 - 5 Sviluppiamo l'Hamiltoniana in serie di potenze di \mathbf{L} , $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e in serie di Fourier di $\boldsymbol{\lambda}$.

Come sviluppare l'Hamiltoniana

- ① Lo sviluppo dell'Hamiltoniana è un problema classico.
- ② Scegliamo un valore Λ^* tale che

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle_\lambda}{\partial \Lambda_j} \right|_{\substack{\Lambda = \Lambda^* \\ \xi = \eta = 0}} = n_j^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $\langle \cdot \rangle_\lambda$ indica la media sugli angoli veloci,
 - n_j^* sono le frequenze fondamentali di moto medio.
- ③ Introduciamo le nuove azioni $L_j = \Lambda_j - \Lambda_j^*$.
 - ④ Effettuiamo una trasformazione canonica \mathcal{T}_F che trasla le azioni veloci.
 - ⑤ Sviluppiamo l'Hamiltoniana in serie di potenze di \mathbf{L} , ξ , η e in serie di Fourier di λ .

Come sviluppare l'Hamiltoniana

- 1 Lo sviluppo dell'Hamiltoniana è un problema classico.
- 2 Scegliamo un valore Λ^* tale che

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle_\lambda}{\partial \Lambda_j} \right|_{\substack{\Lambda = \Lambda^* \\ \xi = \eta = 0}} = n_j^*, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $\langle \cdot \rangle_\lambda$ indica la media sugli angoli veloci,
 - n_j^* sono le frequenze fondamentali di moto medio.
- 3 Introduciamo le nuove azioni $L_j = \Lambda_j - \Lambda_j^*$.
 - 4 Effettuiamo una trasformazione canonica \mathcal{T}_F che trasla le azioni veloci.
 - 5 **Sviluppiamo l'Hamiltoniana in serie di potenze di \mathbf{L} , ξ , η e in serie di Fourier di λ .**

Lo sviluppo dell'Hamiltoniana

$$H^{(\mathcal{T}_F)} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{L} + \sum_{j_1=2}^{\infty} h_{j_1,0}^{(Kep)}(\mathbf{L}) + \mu \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

dove $h_{j_1,0}^{(Kep)}$ è un polinomio omogeneo di grado j_1 in \mathbf{L} e

$$h_{j_1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)} \text{ è un } \begin{cases} \text{pol. omog. di grado } j_1 \text{ in } \mathbf{L}, \\ \text{pol. omog. di grado } j_2 \text{ in } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \\ \text{i cui coeff. sono pol. trig. in } \boldsymbol{\lambda}. \end{cases}$$

Limiti degli sviluppi

Questa è l'Hamiltoniana

$$H^{(\mathcal{T}_F)} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{L} + \sum_{j_1=2}^{\infty} h_{j_1,0}^{(Kep)}(\mathbf{L}) + \mu \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

Limiti degli sviluppi

Questa è l'Hamiltoniana **calcolata**

$$H^{(\mathcal{T}_F)} = \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{L} + \sum_{j_1=2}^2 h_{j_1,0}^{(Kep)}(\mathbf{L}) + \mu \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^{12} h_{j_1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}),$$

in cui abbiamo anche eliminato tutti i coefficienti relativi ad armoniche di grado superiore a **16**.

Questo è il “minimo troncamento” della Hamiltoniana che permette di conservare le caratteristiche fondamentali del sistema.

Riduzione preliminare della perturbazione

$[\cdot]_{\lambda:K_F}$ indica l'eliminazione delle armoniche di grado superiore a K_F .

$$\text{Primo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_1^{(02)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[h_{0,j_2}^{(\mathcal{T}_F)} \right]_{\lambda:8} (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \\ \tilde{H} = \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}} H = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}}^j H. \end{array} \right.$$

$$\text{Secondo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_2^{(02)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[\tilde{h}_{1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)} \right]_{\lambda:8} (\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \\ H^{(02)} = \exp \mathcal{L}_{\chi_2^{(02)}} \circ \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}} H. \end{array} \right.$$

Riduzione preliminare della perturbazione

$[\cdot]_{\lambda:K_F}$ indica l'eliminazione delle armoniche di grado superiore a K_F .

$$\text{Primo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_1^{(02)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[h_{0,j_2}^{(\mathcal{T}_F)} \right]_{\lambda:8} (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \eta) = 0, \\ \tilde{H} = \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}} H = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}}^j H. \end{array} \right.$$

$$\text{Secondo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_2^{(02)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[\tilde{h}_{1,j_2}^{(\mathcal{T}_F)} \right]_{\lambda:8} (\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \eta) = 0, \\ H^{(02)} = \exp \mathcal{L}_{\chi_2^{(02)}} \circ \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(02)}} H. \end{array} \right.$$

Riduzione preliminare della perturbazione

$[\cdot]_{\lambda:K_F}$ indica l'eliminazione delle armoniche di grado superiore a K_F .

$$\text{Primo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_1^{(O2)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[h_{0,j_2}^{(T_F)} \right]_{\lambda:8} (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \eta) = 0, \\ \tilde{H} = \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(O2)}} H = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{L}_{\chi_1^{(O2)}}^j H. \end{array} \right.$$

$$\text{Secondo passo} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}^* \cdot \frac{\partial \chi_2^{(O2)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \mu \sum_{j_2=0}^6 \left[\tilde{h}_{1,j_2}^{(T_F)} \right]_{\lambda:8} (\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \eta) = 0, \\ H^{(O2)} = \exp \mathcal{L}_{\chi_2^{(O2)}} \circ \exp \mathcal{L}_{\chi_1^{(O2)}} H. \end{array} \right.$$

L'Hamiltoniana *all'ordine due nelle masse*

- $H^{(\mathcal{O}2)}$ è la cosiddetta Hamiltoniana all'ordine due nelle masse, nel senso che la sua parte media approssima correttamente la dinamica delle variabili secolari fino all'ordine due nelle masse.
- **Prima** del passo “alla Kolmogorov” non c'è **nessun** termine corrispondente ad alcuna *risonanza tripla*.
- Il passo “alla Kolmogorov” introduce le *risonanze triple*, in particolare la risonanza $(3, -5, -7)$.
- Piccoli limiti **non** significano piccolo sviluppo!
- Dopo il passo “alla Kolmogorov”, abbiamo 94 109 751 di coefficienti.

La parte secolare *all'ordine due nelle masse*

- Ci riduciamo al problema secolare, il problema passa quindi da 6 a 3 gradi di libertà, e l'Hamiltoniana diventa

$$H^{(sec)} = H_0 + H_2 + H_4 + \dots ,$$

dove H_{2j} è un pol. omog. di grado $(2j + 2)$ in ξ e η , $\forall j \in \mathbf{N}$.

- $\xi = \eta = 0$ è un punto di **equilibrio ellittico** e, ricordando che le variabili secolari dipendono dalle eccentricità, lo schema che descriveremo è in sostanza una estensione della teoria di Lagrange–Laplace.
- La parte quadratica dell'Hamiltoniana può quindi essere diagonalizzata e tramite una trasformazione lineare canonica effettuiamo tale diagonalizzazione.
- D'ora in avanti denoteremo semplicemente con H l'Hamiltoniana secolare con la parte quadratica in forma diagonale.

Normalizzazione alla Birkhoff dell'Hamiltoniana secolare

$$H = H_0 + H_2 + H_4 + \dots$$

- Introduciamo le azioni $\Phi_j = \frac{1}{2} (\xi_j^2 + \eta_j^2)$ dove $j = 1, 2, 3$.
- Normalizziamo sino all'ordine N :

$$H^{(N)} = Z_0^{(N)} + Z_2^{(N)} + \dots + Z_N^{(N)} + R_{N+1}^{(N)} + \dots,$$

dove $Z_0^{(N)}, Z_2^{(N)}, \dots, Z_N^{(N)}$ dipendono solamente da Φ_1, Φ_2, Φ_3 .

- La derivata temporale è

$$\dot{\Phi}_j = \{\Phi_j, H\} = \sum_{j>N} \left\{ \Phi_j, R_j^{(N)} \right\} \simeq \left\{ \Phi_j, R_{N+1}^{(N)} \right\}.$$

Studio della stabilità dell'Hamiltoniana secolare

Abbiamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| \leq \left| \sup_{(\xi, \eta) \in \Delta_{\rho R}} \dot{\Phi}(\xi, \eta) \right| |t| ,$$

dove $\Delta_{\rho R} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^6 : \xi_j^2 + \eta_j^2 \leq \rho^2 R_j^2, j = 1, 2, 3\}$.

Studio della stabilità dell'Hamiltoniana secolare

Abbiamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| \leq \left| \sup_{(\xi, \eta) \in \Delta_{\rho R}} \dot{\Phi}(\xi, \eta) \right| |t| ,$$

dove $\Delta_{\rho R} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^6 : \xi_j^2 + \eta_j^2 \leq \rho^2 R_j^2, j = 1, 2, 3\}$.

Vogliamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| < \rho - \rho_0 \quad \forall |t| < T ,$$

dove T è il “tempo di stabilità” (possibilmente lungo).

Studio della stabilità dell'Hamiltoniana secolare

Abbiamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| \leq \left| \sup_{(\xi, \eta) \in \Delta_{\rho R}} \dot{\Phi}(\xi, \eta) \right| |t| ,$$

dove $\Delta_{\rho R} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^6 : \xi_j^2 + \eta_j^2 \leq \rho^2 R_j^2, j = 1, 2, 3\}$.

Vogliamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| < \rho - \rho_0 \quad \forall |t| < T ,$$

dove T è il “tempo di stabilità” (possibilmente lungo).

Prendiamo una funzione

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{k}|=s} f_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{j}} \mathbf{y}^{\mathbf{k}}$$

Studio della stabilità dell'Hamiltoniana secolare

Abbiamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| \leq \left| \sup_{(\xi, \eta) \in \Delta_{\rho R}} \dot{\Phi}(\xi, \eta) \right| |t| ,$$

dove $\Delta_{\rho R} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^6 : \xi_j^2 + \eta_j^2 \leq \rho^2 R_j^2, j = 1, 2, 3\}$.

Vogliamo

$$\|\Phi(t) - \Phi(0)\| < \rho - \rho_0 \quad \forall |t| < T ,$$

dove T è il “tempo di stabilità” (possibilmente lungo).

Prendiamo una funzione

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{k}|=s} f_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{j}} \mathbf{y}^{\mathbf{k}}$$

definiamo la norma

$$\|f\|_{\mathbf{R}} = \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{k}|=s} |f_{\mathbf{j},\mathbf{k}}| \mathbf{R}^{\mathbf{j}+\mathbf{k}}$$

Il “tempo di stabilità”

$$T(\rho_0, \rho, N) \lesssim \frac{\rho - \rho_0}{\left\| \left\{ \Phi_j, R_{N+1}^{(N)} \right\} \right\|_{\mathbf{R}} \rho^{N+3}}$$

Il “tempo di stabilità”

$$T(\rho_0, \rho, N) \lesssim \frac{\rho - \rho_0}{\left\| \left\{ \Phi_j, R_{N+1}^{(N)} \right\} \right\|_{\mathbf{R}} \rho^{N+3}}$$

- Fissiamo ρ_0 e N , con una semplice stima analitica otteniamo $\rho_{opt}(\rho_0, N)$.

Il “tempo di stabilità”

$$T(\rho_0, \rho, N) \lesssim \frac{\rho - \rho_0}{\left\| \left\{ \Phi_j, R_{N+1}^{(N)} \right\} \right\|_{\mathbf{R}} \rho^{N+3}}$$

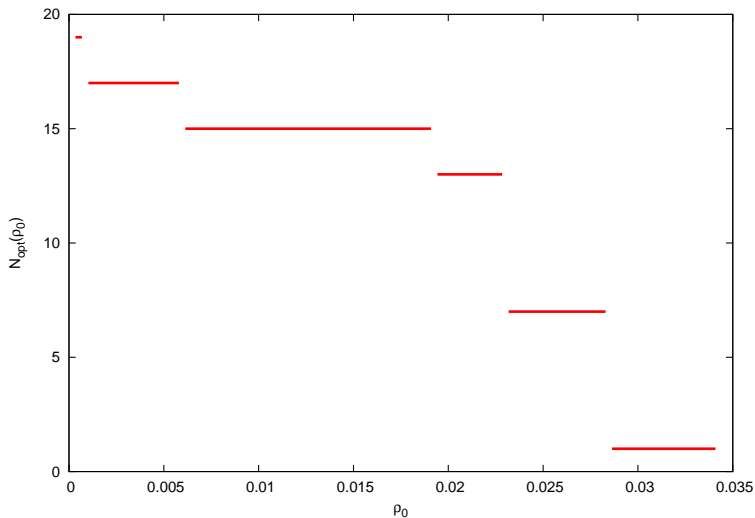
- Fissiamo ρ_0 e N , con una semplice stima analitica otteniamo $\rho_{opt}(\rho_0, N)$.
- Fissiamo ρ_0 ed utilizzando il valore $\rho_{opt}(\rho_0, N)$ studiamo numericamente il “tempo di stabilità” in funzione del passo di normalizzazione; otteniamo così $N_{opt}(\rho_0)$.

Il “tempo di stabilità”

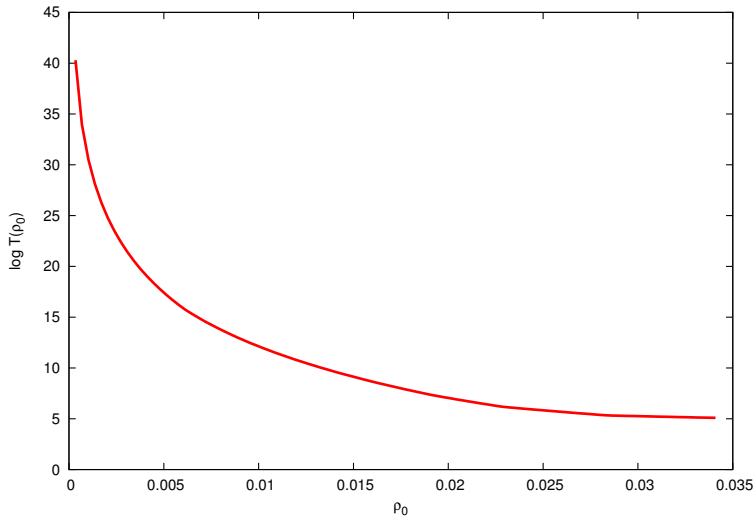
$$T(\rho_0, \rho, N) \lesssim \frac{\rho - \rho_0}{\left\| \left\{ \Phi_j, R_{N+1}^{(N)} \right\} \right\|_{\mathbf{R}} \rho^{N+3}}$$

- Fissiamo ρ_0 e N , con una semplice stima analitica otteniamo $\rho_{opt}(\rho_0, N)$.
- Fissiamo ρ_0 ed utilizzando il valore $\rho_{opt}(\rho_0, N)$ studiamo numericamente il “tempo di stabilità” in funzione del passo di normalizzazione; otteniamo così $N_{opt}(\rho_0)$.
- Il “tempo di stabilità” ottimale $T(\rho_0, \rho_{opt}(\rho_0, N_{opt}(\rho_0)), N_{opt}(\rho_0))$ dipende solamente dal raggio iniziale ρ_0 .

L'ordine di normalizzazione ottimale



Le stime sui “tempi di stabilità” del problema secolare



Commenti sui nostri risultati

- Abbiamo considerato un modello per l'Hamiltoniana secolare del sistema **Sole–Giove–Saturno–Urano nel piano**, che approssima il moto nelle variabili secolari *all'ordine due nelle masse*.
I nostri risultati assicurano che questo sistema è *stabile per un tempo paragonabile all'età stimata dell'universo* in un dominio con un raggio che è circa **la metà della distanza reale delle variabili secolari iniziali dall'origine**.
- Ci aspettiamo che effettuando la riduzione del momento angolare prima del passo “alla Kolmogorov” potremo migliorare significativamente i nostri risultati. Questo nuovo approccio sarà probabilmente oggetto di un lavoro futuro.
- Questi risultati, anche se non completi, confermano che in linea di principio è possibile applicare con successo uno schema di tipo Nekhoroshev per ottenere stime esponenziali sui tempi di stabilità per sistemi planetari **realistici**.

...fine

Grazie per l'attenzione.

Domande?

Commenti?