

Stabilità effettiva di sistemi planetari Hamiltoniani

Marco Sansottera ^[a]

^[a]Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano

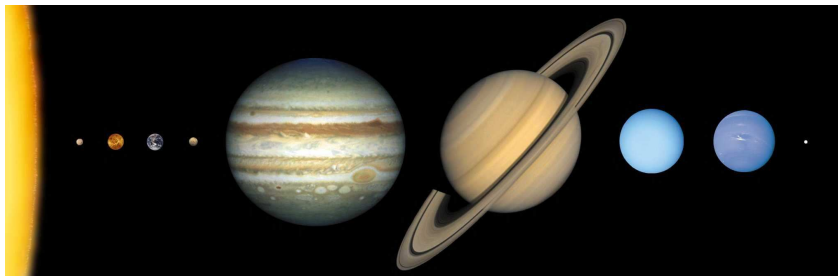
^[b]Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

*Lavoro svolto in collaborazione con
Antonio Giorgilli ^[a] ed Ugo Locatelli ^[b]*

Pisa, 19.02.2011

PRIN 2007B3RB3EY Dyn. Sys. & Appl.

Il sistema solare



Nell'ordine (da sinistra a destra): Sole, Mercurio, Venere, Terra, Marte, **Giove**, **Saturno**, **Urano**, Nettuno e Plutone.

Le proporzioni tra i diametri dei pianeti sono realistiche.

Un pò di cronologia...

- Sin dall'antichità i moti planetari e le loro periodicità rappresentavano nell'immaginario collettivo un perfetto esempio di armonia, erano infatti considerati regolari ed imperturbabili.
- **Greci**: prime predizioni dei moti planetari mediante eccentrici, equanti ed epicicli (versione classica degli sviluppi di Fourier).
- **Copernico**: il Sole al centro dell'universo (Anassimandro).
- **Keplero**: le tre leggi di Keplero (1618–1628), la scoperta dei *moti secolari* di Giove e Saturno.
- **Newton**: la legge di gravitazione universale (1687), le interazioni tra tutti i pianeti, la meravigliosa regolarità di Keplero viene così apparentemente distrutta.
- **Eulero, Lagrange e Laplace**: la teoria perturbativa, i moti secolari, i moti quasi-periodici, le risonanze e i *piccoli divisori*.
- **Poincaré**: le *orbite caotiche* nel problema dei tre corpi.

La dinamica del sistema solare

- Il sistema solare è stabile?

La dinamica del sistema solare

- Il sistema solare è stabile?
- Cosa intendiamo precisamente con la parola *stabilità*?

La dinamica del sistema solare

- Il sistema solare è stabile?
- Cosa intendiamo precisamente con la parola *stabilità*?

Riformuliamo la domanda:

- a) Le orbite dei pianeti rimarranno essenzialmente le stesse per l'eternità, o almeno per un tempo paragonabile all'età stimata dell'universo?
- b) In un futuro remoto, potranno avvenire drastici mutamenti del sistema solare così come lo conosciamo noi oggi, dovuti per esempio alle collisioni tra due pianeti, alla caduta di un pianeta sul Sole o ad una espulsione di un pianeta dal nostro sistema solare?

La dinamica del sistema solare

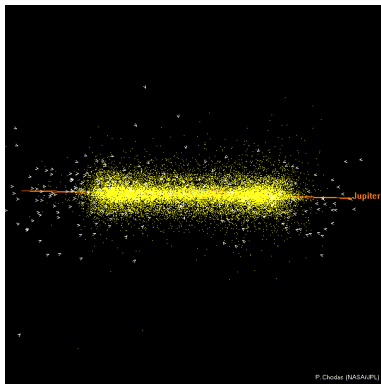
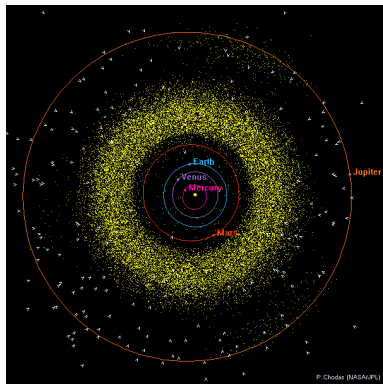
- Il sistema solare è stabile?
- Cosa intendiamo precisamente con la parola *stabilità*?

Riformuliamo la domanda:

- a) Le orbite dei pianeti rimarranno essenzialmente le stesse per l'eternità, o almeno per un tempo paragonabile all'età stimata dell'universo?
- b) In un futuro remoto, potranno avvenire drastici mutamenti del sistema solare così come lo conosciamo noi oggi, dovuti per esempio alle collisioni tra due pianeti, alla caduta di un pianeta sul Sole o ad una espulsione di un pianeta dal nostro sistema solare?

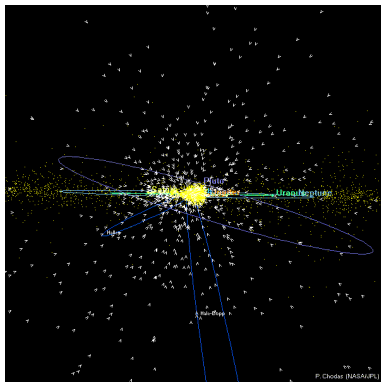
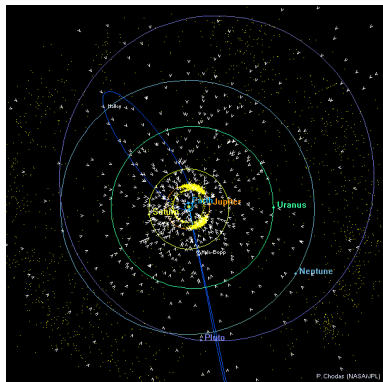
Ancora oggi **non** esiste una risposta definitiva a queste domande!

Le orbite dei pianeti interni



Osserviamo che le orbite dei pianeti interni sono caratterizzate da piccoli valori delle eccentricità e delle inclinazioni.

Le orbite dei pianeti esterni



Osserviamo le orbite dei pianeti esterni (escluso Plutone), sono caratterizzate da piccoli valori delle eccentricità e delle inclinazioni.

Il teorema di Kolmogorov (1954)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere e che esista $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che le corrispondenti frequenze $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}^*)$ soddisfino la condizione diofantea

$$|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau}, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,$$

dove $\gamma \geq 0$ e $\tau \geq n - 1$. Allora, per ε abbastanza piccolo, l'Hamiltoniana possiede un toro invariante sul quale il moto è quasi-periodico con frequenze $\boldsymbol{\omega}$.

Il teorema di Kolmogorov (1954)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere e che esista $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che le corrispondenti frequenze $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}^*)$ soddisfino la condizione diofantea

$$|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau}, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,$$

dove $\gamma \geq 0$ e $\tau \geq n - 1$. Allora, per ε abbastanza piccolo, l'Hamiltoniana possiede un toro invariante sul quale il moto è quasi-periodico con frequenze $\boldsymbol{\omega}$.

Possibile soluzione per il problema della stabilità del sistema solare.

Il teorema di Kolmogorov (1954)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere e che esista $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che le corrispondenti frequenze $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}^*)$ soddisfino la condizione diofantea

$$|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau}, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,$$

dove $\gamma \geq 0$ e $\tau \geq n - 1$. Allora, per ε abbastanza piccolo, l'Hamiltoniana possiede un toro invariante sul quale il moto è quasi-periodico con frequenze $\boldsymbol{\omega}$.

Possibile soluzione per il problema della stabilità del sistema solare.

Problema: quanto deve essere piccola la perturbazione?

Il teorema di Kolmogorov (1954)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere e che esista $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che le corrispondenti frequenze $\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}^*)$ soddisfino la condizione diofantea

$$|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau}, \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n,$$

dove $\gamma \geq \mathbf{0}$ e $\tau \geq n - 1$. Allora, per ε abbastanza piccolo, l'Hamiltoniana possiede un toro invariante sul quale il moto è quasi-periodico con frequenze $\boldsymbol{\omega}$.

Possibile soluzione per il problema della stabilità del sistema solare.

Problema: quanto deve essere piccola la perturbazione?

Hénon: massa di Giove paragonabile a quella di un protone!

Il teorema di Nekhoroshev (1977/79)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere allora, senza addentrarci in ulteriori dettagli tecnici dell'enunciato, il teorema di Nekhoroshev afferma che, per ε abbastanza piccolo,

$$|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)| < \varepsilon^{1/4}, \quad \text{per } |t| < \exp\left(c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(2a)}\right),$$

dove c è una costante ed $a = n^2 + n$.

Il teorema di Nekhoroshev (1977/79)

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h(\mathbf{p}) + \varepsilon f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono variabili di azione-angolo. Assumiamo che la componente imperturbata $h(\mathbf{p})$ sia non-degenere allora, senza addentrarci in ulteriori dettagli tecnici dell'enunciato, il teorema di Nekhoroshev afferma che, per ε abbastanza piccolo,

$$|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)| < \varepsilon^{1/4}, \quad \text{per } |t| < \exp\left(c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(2a)}\right),$$

dove c è una costante ed $a = n^2 + n$.

Stabilità esponenziale: si rinuncia all'invarianza perpetua delle orbite e ci si accontenta di mostrare che gli elementi orbitali critici dei pianeti (semiasse maggiori, eccentricità ed inclinazioni) restino vicini a quelli iniziali per un tempo esponenzialmente lungo.

I risultati ottenuti

Il mio lavoro si suddivide fundamentalmente in tre parti:

I risultati ottenuti

Il mio lavoro si suddivide fundamentalmente in tre parti:

- (I) applicazione delle teorie di Kolmogorov e Nekhoroshev al problema dei tre corpi, in particolare al sistema Sole–Giove–Saturno;

I risultati ottenuti

Il mio lavoro si suddivide fondamentalmente in tre parti:

- (I) applicazione delle teorie di Kolmogorov e Nekhoroshev al problema dei tre corpi, in particolare al sistema Sole–Giove–Saturno;

- (II) studio della stabilità del problema secolare per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano nel caso piano;

I risultati ottenuti

Il mio lavoro si suddivide fundamentalmente in tre parti:

- (I) applicazione delle teorie di Kolmogorov e Nekhoroshev al problema dei tre corpi, in particolare al sistema Sole–Giove–Saturno;
- (II) studio della stabilità del problema secolare per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano nel caso piano;
- (III) costruzione esplicita di una forma normale relativa ai tori ellittici per un sistema planetario e formulazione di un teorema.

Il punto di partenza comune:
l'Hamiltoniana planetaria

L'Hamiltoniana di un sistema planetario

$$F(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) = T^{(0)}(\tilde{\mathbf{r}}) + U^{(0)}(\mathbf{r}) + T^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}) + U^{(1)}(\mathbf{r}),$$

dove \mathbf{r} sono le coordinate eliocentriche e $\tilde{\mathbf{r}}$ i momenti coniugati.

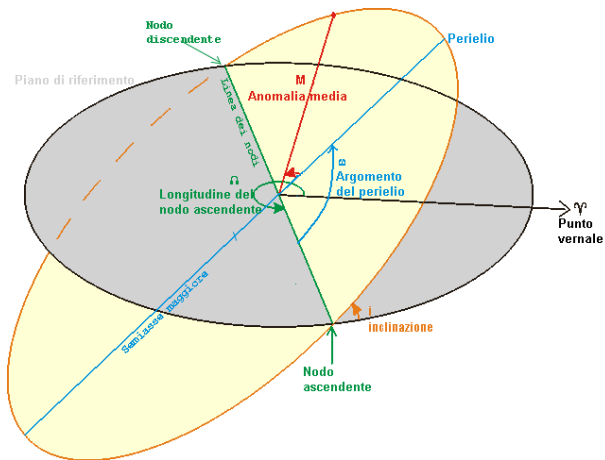
$$T^{(0)}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\mathbf{r}}_j\|^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_j} \right),$$

$$U^{(0)}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^3 \frac{m_0 m_j}{\|\mathbf{r}_j\|},$$

$$T^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2}{m_0} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_3}{m_0} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{r}}_3}{m_0},$$

$$U^{(1)}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \left(\frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} + \frac{m_1 m_3}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|} + \frac{m_2 m_3}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|} \right).$$

I parametri orbitali



a (semiasse maggiore)

e (eccentricità)

i (inclinazione)

ω (argomento del perielio)

M (anomalia media)

Ω (longitudine nodo ascendente)

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

variabili veloci

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

Le variabili di Poincaré nel piano

$$\Lambda_j = \frac{m_0 m_j}{m_0 + m_j} \sqrt{\mathcal{G}(m_0 + m_j) a_j}, \quad \lambda_j = M_j + \omega_j,$$

variabili veloci

$$\xi_j = \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j), \quad \eta_j = -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j),$$

variabili secolari

dove a_j , e_j , M_j e ω_j sono rispettivamente il semiasse maggiore, l'eccentricità, l'anomalia media e l'argomento del perielio del j -esimo pianeta.

L'Hamiltoniana nelle variabili di Poincaré

L'Hamiltoniana, scritta nelle variabili di Poincaré, diventa

$$F = F_0 + F_1$$

L'Hamiltoniana nelle variabili di Poincaré

L'Hamiltoniana, scritta nelle variabili di Poincaré, diventa

$$F = F_0 + F_1 = F_0 + U^{(1)} + T^{(1)}$$

$$F_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2\Lambda_i^2} \quad \text{parte integrabile,}$$

$$U^{(1)} = -G \sum_{0 < i < j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad \text{perturbazione (termine principale),}$$

$$T^{(1)} = \sum_{0 < i < j} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_i \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j}{m_0} \quad \text{perturbazione (termine complementare).}$$

Possiamo sviluppare l'Hamiltoniana in serie di Taylor-Fourier!

L'applicabilità delle teorie di Kolmogorov e Nekhoroshev
al sistema Sole – Giove – Saturno

La stabilità per il sistema SGS vicino ad un toro KAM

Studio della dinamica in un intorno di un toro invariante per il sistema Sole–Giove–Saturno (SGS).

- Costruzione di una buona approssimazione di un toro invariante: U. Locatelli e A. Giorgilli, *Invariant tori in the Sun–Jupiter–Saturn system*, DCDS-B, (2007);
- normalizzazione alla Birkhoff sino ad un ordine finito mediante l'utilizzo di un pacchetto per la manipolazione algebrica scritto *ad hoc* in linguaggio **C** da A. Giorgilli e successivamente sviluppato da U. Locatelli e da me;
- stima del tempo di stabilità *effettivo* alla Nekhoroshev.

La procedura in formule

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} + H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

dove $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{q} \in \mathbb{T}^n$ sono le variabili di azione-angolo. H_1 contiene i termini di grado 2 in \mathbf{p} e K in \mathbf{q} , H_2 quelli di grado 3 in \mathbf{p} e $2K$ in \mathbf{q} .

- Normalizzazione alla Birkhoff sino ad un ordine finito r ,

$$H^{(r)} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} + Z_1(\mathbf{p}) + \dots + Z_r(\mathbf{p}) + \mathcal{R}_r(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

- Consideriamo un dominio

$$\Delta_\rho = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, |p_j| \leq \rho, j = 1, \dots, n\},$$

- $\mathbf{p}(0) \in \Delta_{\rho_0}$ con $\rho_0 < \rho$, $\mathbf{p}(t) \in \Delta_\rho$ per $|t| < T$.

La stima del tempo di stabilità effettivo

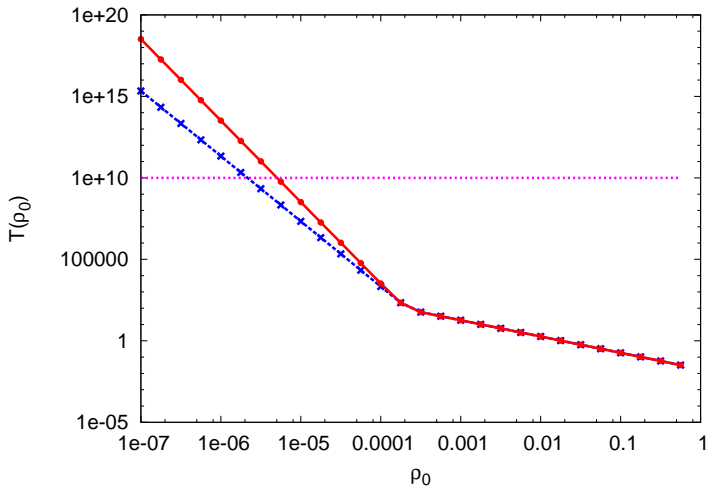
- Una sottostima del tempo di stabilità T è data da

$$\tau(\rho_0, \rho, r) = \frac{\rho - \rho_0}{\|\{\mathbf{p}, \mathcal{R}_r\}\| \rho^{r+2}},$$

che dipende dai parametri ρ_0 , ρ e r .

- Ottimizziamo $\tau(\rho_0, \rho, r)$ rispetto ai parametri ρ e r ed otteniamo una stima $\tilde{\tau}(\rho_0)$ che dipende solamente dal parametro fisico ρ_0 , cioè la distanza delle azioni iniziali $\mathbf{p}(0)$ rispetto all'origine.
- Definiamo questo tempo come il **tempo di stabilità effettivo** del sistema.

Le stime dei tempi di stabilità per il sistema SJS



Risultati ottenuti per $K = 4$ e con delle forme normali di Birkhoff di ordine 4 (blu) e 5 (rosso), calcolate esplicitamente mediante manipolazione algebrica al computer.

Stabilità del problema secolare per il sistema
Sole – Giove – Saturno – Urano nel caso piano

Il problema secolare per il sistema SGSU

Studio della dinamica su tempi lunghi del problema secolare per il sistema Sole–Giove–Saturno–Urano nel caso piano.

- Consideriamo un sistema mediato sugli angoli veloci (seguendo un approccio molto comune in fisica), in quanto siamo interessati al **moto secolare** dei pianeti.
- Problema secolare: si passa da 6 a 3 gradi di libertà,

$$H^{(\text{sec})} = H_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + H_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + H_4(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \dots,$$

dove H_{2j} è un pol. omog. di grado $(2j + 2)$ in $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

- $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ è un punto di **equilibrio ellittico** e, ricordando che le variabili secolari dipendono dalle eccentricità, lo schema che descriveremo è in sostanza una estensione della teoria di Lagrange-Laplace.

La procedura in formule

$$H = H_0(\xi, \eta) + H_2(\xi, \eta) + H_4(\xi, \eta) + \dots$$

- Introduciamo le variabili di azione-angolo

$$\xi_j = \sqrt{2\Phi_j} \cos \varphi_j$$

$$\eta_j = \sqrt{2\Phi_j} \sin \varphi_j$$

- Normalizziamo sino all'ordine r ,

$$H^{(r)} = Z_0(\Phi) + Z_2(\Phi) + \dots + Z_r(\Phi) + \mathcal{R}_r(\Phi, \varphi).$$

- La derivata temporale delle azioni Φ è data da

$$\dot{\Phi}_j = \left\{ \Phi_j, H^{(r)} \right\} = \left\{ \Phi_j, \mathcal{R}_r \right\}.$$

La stima del tempo di stabilità effettivo

- Consideriamo un dominio

$$\Delta_{\rho\mathbf{R}} = \left\{ (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6 : \xi_j^2 + \eta_j^2 \leq \rho^2 R_j^2, j = 1, 2, 3 \right\},$$

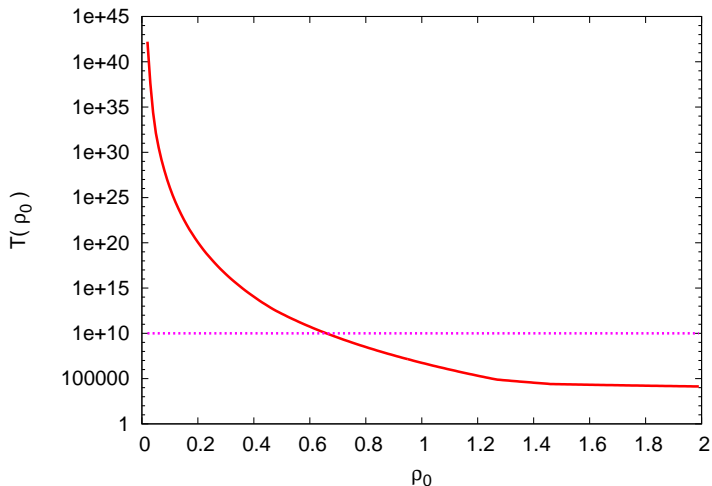
$$\boldsymbol{\Phi}(0) \in \Delta_{\rho_0} \text{ con } \rho_0 < \rho, \quad \boldsymbol{\Phi}(t) \in \Delta_{2\rho_0} \text{ per } |t| < T.$$

- Una sottostima del tempo di stabilità T è data da

$$\tau(\rho_0, r) = \min_j \left(1 - \frac{1}{2^{r+1}} \right) \frac{R_j^2}{(r+1) \|\{\boldsymbol{\Phi}_j, \mathcal{R}_r\}\| \rho_0^{r+1}}.$$

- Ottimizziamo $\tau(\rho_0, r)$ rispetto al parametro r ed otteniamo una stima $\tilde{\tau}(\rho_0)$ che dipende solamente dal parametro fisico ρ_0 .
- Definiamo questo tempo come il **tempo di stabilità effettivo** del sistema.

Le stime dei tempi di stabilità per il problema secolare

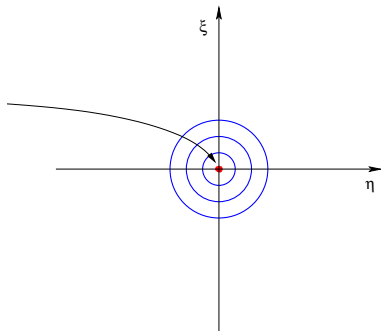
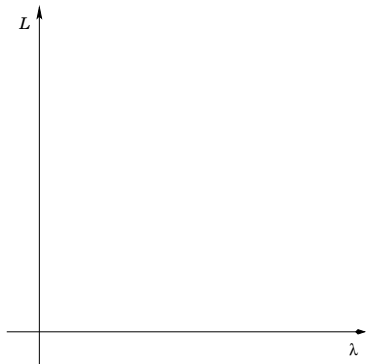


Risultati con una forma normale di Birkhoff di ordine 30, calcolata esplicitamente mediante manipolazione algebrica al computer.

Costruzione esplicita di una forma normale relativa
ai tori ellittici per un sistema planetario

L'estensione del problema secolare

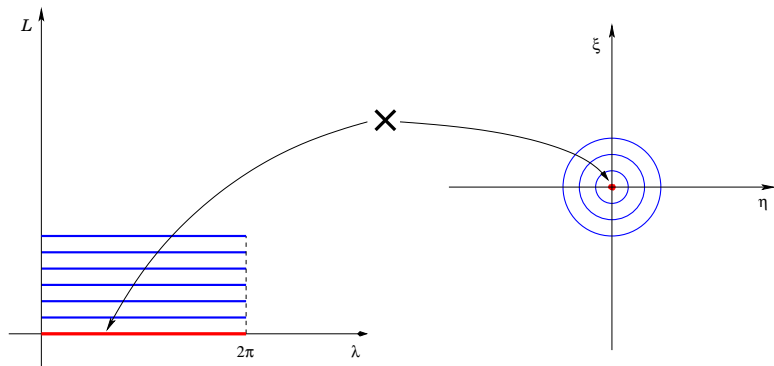
Domanda: A che cosa corrisponde il problema secolare nel modello originale?



L'estensione del problema secolare: il toro ellittico

Domanda: A che cosa corrisponde il problema secolare nel modello originale?

Risposta: Il toro ellittico.



I tori invarianti di dimensione massima

- Il teorema di Kolmogorov si applica a sistemi Hamiltoniani quasi-integrabili **non-degeneri**.
- Nel problema planetario, a causa della **degenerazione del moto Kepleriano**, abbiamo soltanto n frequenze relative al moto medio
- L'estensione del teorema KAM per un sistema planetario sviluppata da Arnold, utilizzando una riformulazione della teoria di Lagrange e Laplace sui moti secolari, ripristina le $2n$ frequenze che si erano perse nell'approssimazione Kepleriana.
- Sin dalle prime applicazioni della teoria KAM, i **tori invarianti** si sono rilevati fondamentali nello studio della dinamica che descrive i moti quasi periodici dei pianeti del sistema solare.

I tori invarianti basso dimensionali

- Oltre ai risultati relativi ai tori invarianti di massima dimensione, è naturale aspettarsi che, nel caso limite di piccole orbite circolari, anche tori invarianti n -dimensionali debbano esistere.
- La dimostrazione di questa affermazione richiede però l'introduzione di nuovi strumenti analitici.
- L'esistenza dei tori ellittici planetari è stata recentemente provata da Biasco, Chierchia e Valdinoci per il problema spaziale dei tre corpi e per un sistema piano con una stella centrale e n pianeti.
- Il loro approccio si basa su un teorema di Pöschel che assicura l'esistenza di tori ellittici basso dimensionali.
- Tuttavia il loro metodo non sembra adatto per applicazioni esplicite anche se si è interessati solamente alla ricerca di **tori ellittici**.

Lo schema di Kolmogorov (un approccio costruttivo)

Lo schema originale della dimostrazione, introdotto da Kolmogorov stesso, è più adatto ad essere tradotto in un **algoritmo esplicito** per la costruzione di tori invarianti.

- Sviluppo di un algoritmo di Kolmogorov **modificato** per la costruzione di tori ellittici.
- Applicazione al sistema Sole–Giove–Saturno–Urano nel caso piano.
- Integrazione del moto sulla superficie invariante con una procedura **semi-analitica**.
- Verifica dell'efficacia del metodo attraverso il calcolo esplicito di un numero finito di passi di normalizzazione.
- Formalizzazione della nostra procedura con dimostrazione rigorosa che il processo di normalizzazione converge, così da ottenere un **teorema di esistenza per i tori ellittici**.

L'applicazione al modello SGSU nel caso piano

$$H = \omega \cdot \mathbf{L} + \sum_{j_1 \geq 2} h_{j_1,0}(\mathbf{L}) + \mu \sum_{j_1 \geq 0} \sum_{j_2 \geq 0} f_{j_1,j_2}(\mathbf{L}, \lambda, \xi, \eta),$$

dove le funzioni sono polinomi di grado j_1 nelle azioni veloci \mathbf{L} e di grado j_2 nelle variabili secolari (ξ, η) , mentre la dipendenza dall'angolo veloce λ è trigonometrica.

La manipolazione esplicita al calcolatore rende necessario un troncamento degli sviluppi, imponiamo quindi i seguenti criteri:

- la componente Kepleriana comprende i termini sino al grado 4;
- le funzioni f_{j_1,j_2} includono:
 - i termini di grado j_1 nelle azioni \mathbf{L} con $j_1 \leq 3$;
 - i termini di grado j_2 nelle variabili (ξ, η) , dove j_2 è tale che $2j_1 + j_2 \leq 8$;
 - i termini sino al grado trigonometrico 18 rispetto agli angoli λ .

Le equazioni del moto

Consideriamo un punto $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in (\mathbf{0}, \mathbb{T}^3, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{L}_j &= -\frac{\partial f_{0,0}}{\partial \lambda_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), & \dot{\xi}_j &= -\frac{\partial f_{0,1}}{\partial \eta_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \dot{\lambda}_j &= \omega_j + \frac{\partial f_{1,0}}{\partial L_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), & \dot{\eta}_j &= \frac{\partial f_{0,1}}{\partial \xi_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0}),\end{aligned}$$

quindi, per rendere invariante la varietà $(\mathbf{0}, \mathbb{T}^3, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, è necessario **uccidere i termini** perturbativi $f_{0,0}$, $f_{0,1}$, $f_{1,0}$ e $f_{0,2}$.

La forma normale di ordine $r - 1$ dell'Hamiltoniana

Introduciamo nuovamente le variabili di azione-angolo secolari,

$$\xi_j = \sqrt{2\Phi_j} \cos \varphi_j$$

$$\eta_j = \sqrt{2\Phi_j} \sin \varphi_j$$

possiamo riscrivere l'Hamiltoniana del sistema,

$$\begin{aligned} H^{(r-1)} = & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \sum_{j_1 \geq 2} h_{j_1,0}(\mathbf{L}) \\ & + \sum_{s \geq r} f_{0,0}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{s \geq r} f_{0,1}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{s \geq r} f_{0,2}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ & + \sum_{s \geq r} f_{1,0}^{(r-1,s)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}) + \sum_{j_1 \geq 0} \sum_{j_2 \geq 0} \sum_{s > 0} f_{j_1, j_2}^{(r-1,s)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \end{aligned}$$

dove l'indice $r - 1$ indica l'ordine della normalizzazione.

Descriviamo l' r -esimo passo di normalizzazione.

Il processo di normalizzazione

$$\left\{ \chi_0^{(r)}, \boldsymbol{\omega}^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} \right\} + \sum_{s=1}^r f_{0,0}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

Il processo di normalizzazione

$$\left\{ \chi_0^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} \right\} + \sum_{s=1}^r f_{0,0}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

$$\left\{ \chi_1^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} \right\} + \sum_{s=0}^r f_{0,1}^{(1;r,s)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0,$$

Il processo di normalizzazione

$$\left\{ \chi_0^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} \right\} + \sum_{s=1}^r f_{0,0}^{(r-1,s)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

$$\left\{ \chi_1^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} \right\} + \sum_{s=0}^r f_{0,1}^{(I;r,s)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0,$$

$$\left\{ \chi_2^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} \right\} + \sum_{s=1}^r f_{1,0}^{(II;r,s)}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

$$\left\{ Y_2^{(r)}, \omega^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} \right\} + \sum_{s=1}^r f_{0,2}^{(II;r,s)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0,$$

$$\left\{ D_2^{(r)}, \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} \right\} + f_{0,2}^{(II;r,0)}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\varphi}) - \langle f_{0,2}^{(II;r,0)} \rangle_{\boldsymbol{\varphi}} = 0,$$

I piccoli divisori e le condizioni di Melnikov

- Primo passo

$$\min_{0 < |\mathbf{k}| \leq rK} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}|),$$

I piccoli divisori e le condizioni di Melnikov

- Primo passo

$$\min_{0 < |\mathbf{k}| \leq rK} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}|),$$

- Secondo passo (*prima condizione di Melnikov*)

$$\min_{\substack{|\mathbf{k}| \leq rK \\ |\ell|=1}} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} + \ell \cdot \boldsymbol{\Omega}|),$$

I piccoli divisori e le condizioni di Melnikov

- Primo passo

$$\min_{0 < |\mathbf{k}| \leq rK} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}|),$$

- Secondo passo (*prima condizione di Melnikov*)

$$\min_{\substack{|\mathbf{k}| \leq rK \\ |\boldsymbol{\ell}|=1}} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\Omega}|),$$

- Terzo passo (*seconda condizione di Melnikov*)

$$\min_{\substack{|\mathbf{k}| \leq rK \\ |\boldsymbol{\ell}|=2}} (|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\Omega}|),$$

La procedura in formule

Osserviamo che ad ogni passo dobbiamo modificare le frequenze,

$$\boldsymbol{\omega}^{(r)} \cdot \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}^{(r-1)} \cdot \mathbf{L} + f_{1,0}^{(\text{II};r,0)}(\mathbf{L}), \quad \boldsymbol{\Omega}^{(r)} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \langle f_{0,2}^{(\text{II};r,0)} \rangle_{\varphi}.$$

Mediante le tre successioni di funzioni generatrici

$$\left\{ \chi_0^{(i)} \right\}_i, \quad \left\{ \chi_1^{(i)} \right\}_i \quad \text{e} \quad \left\{ \chi_2^{(i)} = X_2^{(i)} + Y_2^{(i)} + D_2^{(i)} \right\}_i,$$

possiamo definire una successione di trasformazioni canoniche $\mathcal{C}^{(r)}$ come

$$\mathcal{C}^{(r)} = \exp(\mathcal{L}_{\chi_2^{(r)}}) \exp(\mathcal{L}_{\chi_1^{(r)}}) \exp(\mathcal{L}_{\chi_0^{(r)}}) \dots \exp(\mathcal{L}_{\chi_2^{(1)}}) \exp(\mathcal{L}_{\chi_1^{(1)}}) \exp(\mathcal{L}_{\chi_0^{(1)}}),$$

dove le funzioni generatrici $\chi_0^{(i)}$, $\chi_1^{(i)}$ e $\chi_2^{(i)}$ hanno grado trigonometrico massimo iK e sono di grado j_1 nelle azioni veloci \mathbf{L} e j_2 nelle variabili secolari $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$, con $2j_1 + j_2 = 0, 1, 2$, rispettivamente.

Il moto sui tori ellittici

Denotiamo con \mathcal{E} la funzione

$$\mathcal{E}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y),$$

che trasforma il punto $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ nelle corrispondenti coordinate posizione-momento.

L'insieme delle condizioni iniziali corrispondenti al toro ellittico sono date da $\mathcal{E} \circ \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, con $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{T}^3$.

Lo spettro di Fourier del moto sul toro ellittico è fortemente caratteristico, infatti **solamente le frequenze veloci e le loro combinazioni lineari possono comparire**. Questa semplice osservazione ci permette di controllare l'accuratezza dei nostri risultati attraverso l'analisi in frequenza.

Le approssimazioni del toro ellittico

- Ad ogni passo di normalizzazione otteniamo delle varietà approssimativamente invarianti, che convergono al toro ellittico invariante.
- Senza perdita di generalità, consideriamo un punto particolare sul toro nelle coordinate normalizzate: $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.
- Consideriamo l'approssimazione banale del punto sul toro ellittico nelle coordinate iniziali, cioè

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

- Mediante manipolazione algebrica al calcolatore, *raffiniamo* l'approssimazione di quello stesso punto del toro ellittico, cioè

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{C}^{(9)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

L'analisi in frequenza dei segnali secolari

- Consideriamo come punto iniziale in primo luogo l'approssimazione banale del punto sul toro ellittico nelle coordinate originali e successivamente l'approssimazione ottenuta con una forma normale di ordine 9,

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{C}^{(0)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} \circ \mathcal{C}^{(9)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

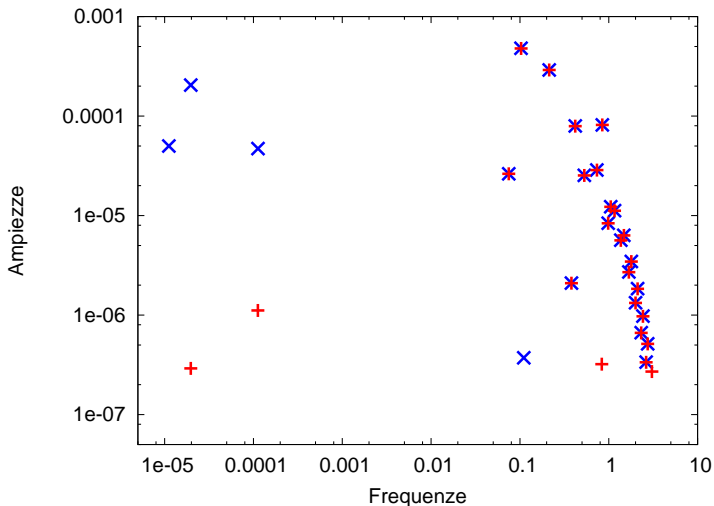
- Effettuiamo una integrazione numerica e consideriamo i segnali secolari

$$(\xi_1(t), \eta_1(t)), \quad (\xi_2(t), \eta_2(t)), \quad (\xi_3(t), \eta_3(t)),$$

rispettivamente di Giove, Saturno ed Urano.

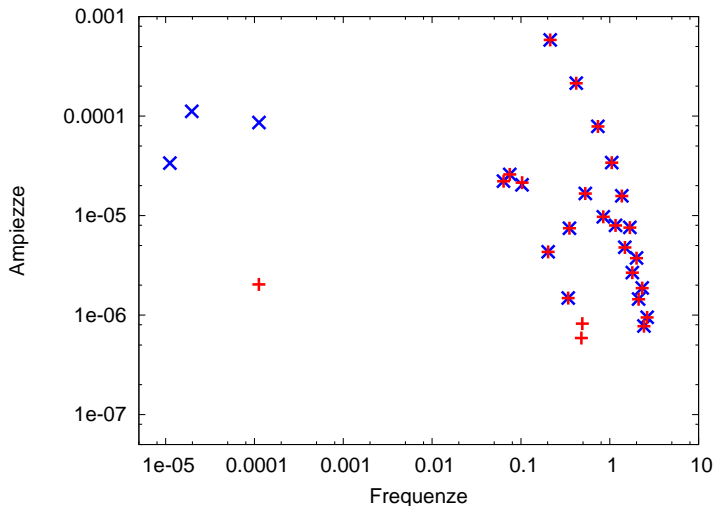
- Controlliamo l'accuratezza del toro ellittico approssimato effettuando l'analisi in frequenza dei tre segnali secolari per i due diversi punti iniziali.

La scomposizione del segnale relativo a Giove



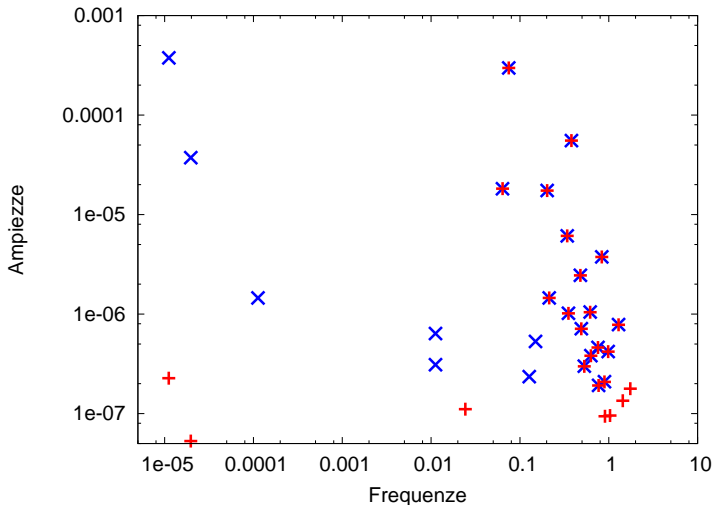
I simboli in **blu** (x) si riferiscono all'approssimazione banale, mentre quelli in **rosso** (+) al toro ellittico approssimato.

La scomposizione del segnale relativo a Saturno



I simboli in **blu** (x) si riferiscono all'approssimazione banale, mentre quelli in **rosso** (+) al toro ellittico approssimato.

La scomposizione del segnale relativo ad Urano



I simboli in **blu** (x) si riferiscono all'approssimazione banale, mentre quelli in **rosso** (+) al toro ellittico approssimato.

Formalizzazione del risultato ottenuto e
teorema sulla costruzione dei tori ellittici

Il teorema sulla costruzione dei tori ellittici

Teorema sulla costruzione dei tori ellittici

Consideriamo una Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} + i \sum_j \varepsilon \Omega_j x_j y_j + \sum_{l \geq 0} \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s f_l^{(s)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dove le funzioni $f_l^{(s)}$ soddisfano le seguenti condizioni

$$f_0^{(0)} = f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = 0, \quad \langle f_0^{(1)} \rangle_{\mathbf{q}} = \langle f_1^{(1)} \rangle_{\mathbf{q}} = \langle f_2^{(1)} \rangle_{\mathbf{q}} = 0,$$

ed assumiamo che

$$\|f_l^{(s)}\| \leq E \quad \text{per ogni } l, s \geq 0.$$

Il teorema sulla costruzione dei tori ellittici

Allora, se il parametro perturbativo, ε , è abbastanza piccolo e ad ogni passo sono soddisfatte le condizioni di non risonanza

$$\min_{\substack{0 < |\mathbf{k}| < rK \\ 0 < |\boldsymbol{\ell}| \leq 2}} |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(r-1)} + \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)}| \geq \alpha_r,$$
$$\min_{|\boldsymbol{\ell}|=2} |\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{(r-1)}| \geq \beta_r,$$

esiste una trasformazione canonica prossima all'identità che pone l'Hamiltoniana nella forma normale

$$H^{(\infty)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\omega}^{(\infty)} \cdot \mathbf{p} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\Omega_j^{(\infty)} (x_j^2 + y_j^2)}{2} + \mathcal{O}(\|\mathbf{p}\|^2) + \mathcal{O}(\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|^3).$$

Il toro ellittico corrispondente, $\mathbf{p} = \mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, è invariante e le orbite su questa varietà sono quasi-periodiche con frequenze $\boldsymbol{\omega}^{(\infty)}$.

L'attraversamento delle zone risonanti

Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

L'attraversamento delle zone risonanti

Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

Dobbiamo garantire l'esistenza di un insieme di **misura positiva** di frequenze che si mantengano lontane dalle **zone risonanti** durante tutto il processo di normalizzazione!

L'attraversamento delle zone risonanti

Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

Dobbiamo garantire l'esistenza di un insieme di **misura positiva** di frequenze che si mantengano lontane dalle **zone risonanti** durante tutto il processo di normalizzazione!

Lo schema della dimostrazione che abbiamo adottato è fortemente ispirato dalla dimostrazione di Arnold del teorema KAM:

L'attraversamento delle zone risonanti

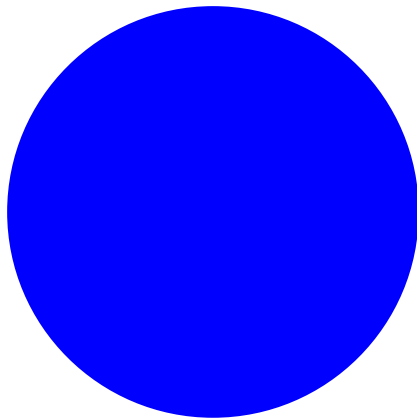
Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

Dobbiamo garantire l'esistenza di un insieme di **misura positiva** di frequenze che si mantengano lontane dalle **zone risonanti** durante tutto il processo di normalizzazione!

Lo schema della dimostrazione che abbiamo adottato è fortemente ispirato dalla dimostrazione di Arnold del teorema KAM:

- consideriamo una palla iniziale \mathcal{B}_0 di frequenze ω "buone";

L'attraversamento delle zone risonanti



L'insieme \mathcal{B}_0 delle frequenze iniziali “buone”.

L'attraversamento delle zone risonanti

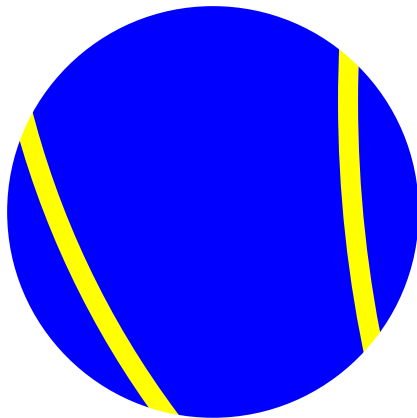
Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

Dobbiamo garantire l'esistenza di un insieme di **misura positiva** di frequenze che si mantengano lontane dalle **zone risonanti** durante tutto il processo di normalizzazione!

Lo schema della dimostrazione che abbiamo adottato è fortemente ispirato dalla dimostrazione di Arnold del teorema KAM:

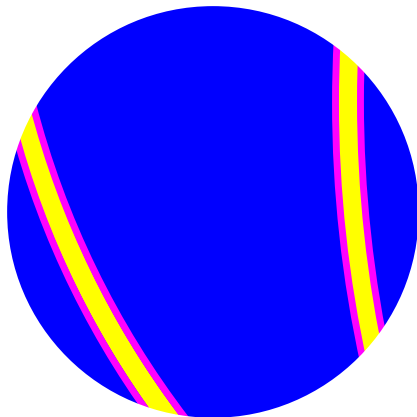
- consideriamo una palla iniziale \mathcal{B}_0 di frequenze ω "buone";
- isoliamo le varietà risonanti e togliamo dal dominio "buono" delle strisce attorno a queste varietà corrispondenti alle zone risonanti;

L'attraversamento delle zone risonanti



Isoliamo le *zone risonanti*.

L'attraversamento delle zone risonanti



Allarghiamo le *zone risonanti* per mantenerci lontani dalle varietà risonanti durante **tutto** il processo di normalizzazione.

L'attraversamento delle zone risonanti

Problema: come possiamo garantire che le condizioni di non risonanza siano soddisfatte ad ogni passo?

Dobbiamo garantire l'esistenza di un insieme di **misura positiva** di frequenze che si mantengano lontane dalle **zone risonanti** durante tutto il processo di normalizzazione!

Lo schema della dimostrazione che abbiamo adottato è fortemente ispirato dalla dimostrazione di Arnold del teorema KAM:

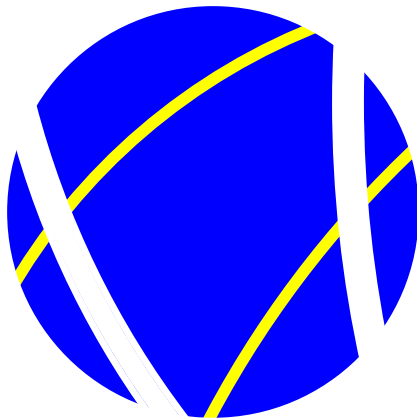
- consideriamo una palla iniziale \mathcal{B}_0 di frequenze ω "buone";
- isoliamo le varietà risonanti e togliamo dal dominio "buono" delle strisce attorno a queste varietà corrispondenti alle zone risonanti;
- chiamiamo \mathcal{B}_1 l'insieme rimanente ed iteriamo il processo costruendo una successione di domini "buoni" incastolati \mathcal{B}_r .

L'attraversamento delle zone risonanti



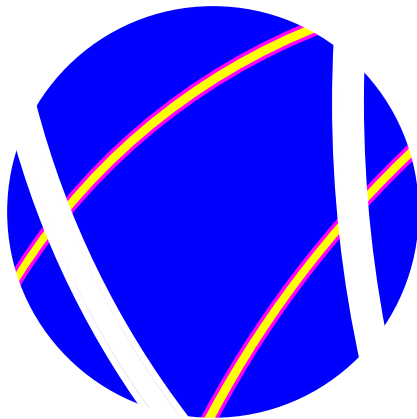
L'insieme \mathcal{B}_1 delle frequenze “buone” al termine del primo passo di normalizzazione.

L'attraversamento delle zone risonanti



Isoliamo le nuove *zone risonanti*.

L'attraversamento delle zone risonanti



Allarghiamo le *zone risonanti* per mantenerci lontani dalle varietà risonanti durante **tutto** il processo di normalizzazione.

L'attraversamento delle zone risonanti



L'insieme \mathcal{B}_2 delle frequenze “buone” al termine del secondo passo di normalizzazione.

L'argomento di misura

Abbiamo costruito una successione di domini inscatolati $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{B}_r \supseteq \mathcal{B}_{r+1} \supseteq \dots,$$

che soddisfano le condizioni di non risonanza del teorema ad ogni passo della normalizzazione.

L'argomento di misura

Abbiamo costruito una successione di domini inscatolati $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{B}_r \supseteq \mathcal{B}_{r+1} \supseteq \dots,$$

che soddisfano le condizioni di non risonanza del teorema ad ogni passo della normalizzazione.

Problema: per poter applicare il teorema, dobbiamo garantire che l'insieme limite $\mathcal{B}_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{B}_r$ non sia vuoto e abbia misura positiva!

L'argomento di misura

Abbiamo costruito una successione di domini incastolati $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{B}_r \supseteq \mathcal{B}_{r+1} \supseteq \dots,$$

che soddisfano le condizioni di non risonanza del teorema ad ogni passo della normalizzazione.

Problema: per poter applicare il teorema, dobbiamo garantire che l'insieme limite $\mathcal{B}_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{B}_r$ non sia vuoto e abbia misura positiva!

Teorema (argomento di misura)

Abbiamo dimostrato che l'insieme limite $\mathcal{B}_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{B}_r$ che "sopravvive" ha *misura positiva* e *soddisfa le condizioni di non risonanza ad ogni passo della normalizzazione*.

Grazie per l'attenzione.

Domande?

Commenti?
