Scheda 7

Ripartendo dalla mappa del cerchio iniziamo a esplorare la mappa standard.
Ricordiamo che la *mappa del cerchio* è una mappa $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ con $f : S^1 \to S^1$ definita come

$$f(\theta) = \theta + \Omega + \varepsilon \sin(\theta) \pmod{2\pi} \ .$$

Con $\varepsilon = 0$ essa può essere rappresentata anche sul cilindro $S^1 \times I$ (con I un opportuno intervallo) come mappa in dimensione due

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + \Omega \pmod{2\pi} \\ \Omega' &= \Omega \end{aligned}$$

col cilindro foliato in cerchi invarianti su cui il moto è di rotazione (periodico o quasi periodico) con velocità crescenti con la "quota" Ω.
Con $\varepsilon \neq 0$ e cambiando per comodità variabili si ottiene la famosa *standard map* (che può essere scritta in diverse forme equivalenti)

$$\begin{aligned} x' &= x + y + \varepsilon \sin(x) \pmod{2\pi} \\ y' &= y + \varepsilon \sin(x) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

1. Esplorare la dinamica della standard map con vari dati iniziali al variare di ε.

   come si può interpretare il risultato?

2. Calcolare e plottare il numero di rotazione ω in funzione di y (ovvero con i dati iniziali in un insieme a vostra scelta, ad esempio $(x_0, y_0) = (\pi, y)$), al variare di ε.

   come si interpretano i risultati ottenuti?