Comunicazione Digitale

Istituzioni di Matematiche, A.A. 2006/2007

C.Tarsi

Diario delle lezioni

Questa nota contiene solo un elenco non dettagliato di ciò che è stato fatto in aula. Non rappresenta in alcun modo una dispensa del corso!

6.03.2007

Breve presentazione del corso.

Gli insiemi numerici:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$ l'insieme dei numeri *naturali*
- $\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ l'insieme dei numeri *relativi*; $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ l'insieme dei numeri *razionali*; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

Oss. Per noi "numero razionale" è una qualsiasi frazione $\frac{m}{n}$ con m, n primi fra loro. Questo equivale a introdurre nel'insieme delle frazioni una relazione di equivalenza $\sim$, definita come segue: $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'}$ se e solo se $mn' = m'n$; numero razionale, quindi, è ogni classe di equivalenza, il cui "rappresentante privilegiato" è $\frac{m}{n}$, con m, n primi fra loro.

Prop. $(\mathbb{Q}, \leq)$ è un campo totalmente ordinato.

Principi delle disequazioni.

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sulla retta.

Def. Chiamiamo *allineamento decimale* una qualsiasi sequenza del tipo

$$\pm d, c_1c_2c_3...$$

dove $d \in \mathbb{N}$ e $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; escludiamo i decimali periodici con periodo $\overline{9}$.

Prop. $\mathbb{Q}$ può essere identificato con l'insieme degli sviluppi decimali finiti o infiniti periodici. Cioè, ad ogni numero razionale corrisponde uno sviluppo decimale, finito o periodico, e viceversa ad ogni sviluppo decimale, finito o periodico, corrisponde un numero razionale che lo genera (*frazione generatrice*)

Inadeguatezza di $\mathbb{Q}$:

1. l'insieme degli sviluppi decimali è più ampio di $\mathbb{Q}$!
2. non tutte le grandezze sono in rapporto razionale tra di loro: in particolare, la diagonale del quadrato NON è esprimibile come rapporto razionale del lato!

   Teo. $\nexists \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2.$

   In altre parole: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. (dim.)

3. l'operazione di elevamento a potenza non è invertibile in $\mathbb{Q}^+$

CENNI SUI NUMERI REALI

Def. Chiamiamo *numero reale* un qualsiasi sviluppo decimale, finito o infinito, periodico o non, che non termini con $\overline{9}$. Denotiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

Prop. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo totalmente ordinato, ed è una estensione di $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta?

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.

- $M \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $a \leq M$, $\forall\ a \in A$
- $m \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $a \geq m$, $\forall\ a \in A$
- $M \in \mathbb{R}$ è *massimo* di A se M è un maggiorante e $M \in A$
- $m \in \mathbb{R}$ è *minimo* di A se M è un minorante e e $m \in A$
- A è *limitato superiormente* se ammette maggiorante
- A è *limitato inferiormente* se ammette minorante
- A è *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente

Esempi.

Oss. Il massimo di A, se esiste, è unico. Idem per il minimo.

Def. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.

- $S \in \mathbb{R}$ è *estremo superiore* di A, $S = \sup A$ se è il minimo dei maggioranti, ovvero se valgono le due condizioni seguenti:
  1. $a \leq S$, $\forall\ a \in A$ (cioè, S è un maggiorante)
  2. $\forall s < S\ \exists a \in A$ t.c. $s < a \leq S$ (cioè, nessun elemento minore di S è un maggiorante).
- $s \in \mathbb{R}$ è *estremo inferiore* di A, $s = \inf A$ se è il massimo dei minoranti, ovvero se valgono le due condizioni seguenti:
  1. $s \leq a$, $\forall\ a \in A$ (cioè, s è un minorante)
  2. $\forall S > s\ \exists a \in A$ t.c. $s < a \leq S$ (cioè, nessun elemento maggiore di s è un minorante).

Esempi.

Def. Se A è illimitato superiormente, denotiamo con $+\infty = \sup A$.
Analogamente, se A è illimitato inferiormente, denotiamo con $-\infty = \inf A$.

Teo. $\mathbb{R}$ ha la *proprietà del sup*: ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, limitato superiormente, ammette estremo superiore finito in $\mathbb{R}$.

Analogamente, ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, limitato inferiormente, ammette estremo inferiore finito in $\mathbb{R}$.

Teo. (completezza di $\mathbb{R}$) Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \varnothing$, t.c.

$$\forall\, a \in A, \forall\, b \in B \;\; a \leq b.$$

Allora esiste un elemento $x_0 \in \mathbb{R}$ (*elemento separatore*) t.c. $a \leq x_0 \leq b$ per ogni $a \in A, b \in B$.

Conseguenza: ogni numero reale è essere rappresentato da un punto sulla retta (fissati un'origine ed un verso); viceversa, ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale che lo rappresenta.

9.03.2007

def. Chiamiamo *intervallo* un qualsiasi insieme $I \subset \mathbb{R}$ che abbia la seguente proprietà:

$$\forall\, x, y \in I : y > x, \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y \Rightarrow z \in I$$

(cioè, l'insieme I 'non contiene buchi').
Classificazione degli intervalli:

- **intervalli limitati**: sia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:
  1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto
  2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso
  3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervallo aperto a destra e chiuso a sinistra
  4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra
- **intervalli illimitati**: sia $a \in \mathbb{R}$:
  1. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ intervallo aperto
  2. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ intervallo chiuso
  3. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ intervallo aperto
  4. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ intervallo chiuso.

def. Sia $x \in \mathbb{R}$. Definiamo $|x|$ *valore assoluto di* x (o *modulo* di x) come segue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } \; x \geq 0 \\ -x & \text{se } \; x < 0 \end{cases}$$

Oss. Se P è il punto sulla retta orientata corrispondente al numero reale x (ovvero, '*di ascissa* x'), allora $|x|$ =lunghezza del segmento OP. Cioè,

$$|x| = d(P, O)$$

(il valore assoluto del numero x coincide con la distanza del punto P di ascissa x dall'origine).
Il valore assoluto permette di misurare la distanza fra punti sulla retta reale.

def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo *intorno di x_0, di raggio r* ogni insieme I del tipo

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Si osserva facilmente che $I = (x_0 - r, x_0 + r)$

def. Chiamiamo *intorno di $-\infty$* ogni insieme I del tipo

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x < r\}.$$

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

def. Siano A, B due insiemi. Si chiama *funzione* $f : A \to B$ ogni legge che ad ogni elemento di A (o ad un suo sottoinsieme) associa uno ed un solo elemento di B.

Esempi di funzioni e di leggi che NON sono funzioni

def. Siano $A, B \subset R$. Si chiama *funzione reale di variabile reale* $f : A \to B$ ogni legge che ad ogni $x \in A$ (o ad un suo sottoinsieme) associa uno ed un solo elemento di $y \in B$, detto *immagine di x*.
In simboli:

$$\begin{array}{rcl} f : A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

def. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definiscono

$$\begin{array}{rcll} dom(f) & = & \{x \in \mathbb{R} : \exists\ f(x)\} & \text{(dominio di } f) \\ Im(f) & = & \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in dom(f) : y = f(x)\} & \text{(immagine di } f) \end{array}$$

Esempi.

Richiami su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sui sistemi di riferimento cartesiani. Il piano cartesiano.

def. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo *grafico di f* il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dato da:

$$\begin{array}{rcl} graf(f) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists x \in dom(f) : y = f(x)\} \\ & = & \{(x, f(x)), x \in dom(f)\}. \end{array}$$

Le proprietà delle funzioni corrispondono a proprietà del grafico. Esempi.
def. Sia $f(x) : A \to B \subset \mathbb{R}$ una funzione.

- f si dice *iniettiva* se $\forall\ x_1, x_2 \in dom(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- f si dice *suriettiva* B se $\forall\ y \in B\ \exists\ x \in dom(f) : y = f(x)$, cioè se $Im(f) = B$

- f si dice *pari* se $\forall\ x \in dom(f)$, $f(-x) = f(x)$

- f si dice *dispari* se $\forall\ x \in dom(f)$, $f(-x) = -f(x)$

Esempi. Proprietà corrispondenti dei grafici.

Alcune funzioni

- La *retta*: $y = mx + q$ retta di *coefficiente angolare* m; $y = c$ retta orizzontale; $x = c$ retta verticale (quest'ultima non è il grafico di una funzione!)

- La *parabola*: $y = ax^2 + bx + c$. Equazioni di II grado e intersezioni tra parabole e asse orizzontale

- La funzione *valore assoluto* o *modulo*: $y = |x|$

- L'*iperbole equilatera*: $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Osservazioni sul dominio.

Alcuni esercizi: disequazioni di II grado, razionali e con modulo.

13.03.2007

Operazioni sulle funzioni

def. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni, e sia $a \in \mathbb{R}$. Definiamo:

- $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (*somma di funzioni*)

- $(a \cdot f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ (*prodotto per uno scalare*)

- $(f \cdot g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (*prodotto di funzioni*)

- $(f/g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $\forall\ xt.cg(x) \neq 0$ (*quoziente di funzioni*)

Oss. Se $f(x)$ è definita su $dom(f) \subset \mathbb{R}$, e $g(x)$è definita su $dom(g) \subset \mathbb{R}$, le operazioni sopra introdotte sono definite in $dom(f) \cap dom(g)$ o su un suo sottoinsieme (come nel caso del quoziente).

Esempi.

def. (*Composizione di funzioni*) Siano $f : dom(f) \to Im(f)$, $g : dom(g) \to Im(g)$, tali che $Im(f) \subseteq dom(g)$. Definiamo

$$\begin{aligned} g \circ f :\ \ dom(f) &\longrightarrow Im(g) \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Esempi. L'operazione di composizione NON commuta, cioè $g \circ f \neq f \circ g$!

Operazioni sui grafici

def. Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $g_c(x) = x + c$, con $c \in \mathbb{R}$, fissato. Allora:

- $(f \circ g_c) = f(x+c)$ (*traslata di f lungo l'asse delle x*) è la funzione il cui grafico si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ lungo l'asse orizzontale (a destra, se $c < 0$, a sinistra, se $c > 0$)

- $(g_c \circ f) = f(x) + c$ (*traslata di f lungo l'asse delle y*) è la funzione il cui grafico si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ lungo l'asse verticale (in alto, se $c > 0$, in basso, se $c < 0$).

def. Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $g(x) = -x$. Allora:

- $(f \circ g) = f(-x)$ (*riflessione di f rispetto all'asse delle y*) è la funzione il cui grafico si ottiene riflettendo il grafico di $f(x)$ rispetto all'asse verticale

- $(g \circ f) = -f(x)$ (*riflessione di f rispetto all'asse delle x*) è la funzione il cui grafico si ottiene riflettendo il grafico di $f(x)$ rispetto all'asse orizzontale.

def. Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia $g(x) = |x|$. Allora:

- $(f \circ g) = f(|x|)$ è la funzione il cui grafico è uguale al grafico di f, per $x \geq 0$, mentre per $x < 0$ si ottiene riflettendo il grafico di $f, x \leq 0$, rispetto all'asse verticale

- $(g \circ f) = |f(x)|$ è la funzione il cui grafico è uguale al grafico di f, per $f(x) \geq 0$, mentre per i valori di x t.c. $f(x) < 0$ si ottiene riflettendo il grafico di rispetto all'asse orizzontale.

Esempi. Ancora disequazioni algebriche, razionali, con modulo e grafici.

def. (*Funzione inversa*) Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Si definisce *funzione inversa* f^{-1} la funzione:

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ \ Im(f) &\longrightarrow dom(f) \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = x, \ x \ t.c. \ f(x) = y, \end{aligned}$$

cioè, la funzione che ad ogni $y \in Im(f)$ associa la sua controimmagine $x \in dom(f)$ (che è unica, per l'iniettività di f).

def. Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to Im(f) \subseteq \mathbb{R}$, e sia $I \subseteq dom(f)$. La funzione f si dice *invertibile su I* se la funzione f ristretta ad I, $f : I \to Im(f)$ è invertibile.

def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo *funzione identità su A*, $Id|_A : A \to A$, la funzione che ad ogni $x \in A$ associa $Id|_A(x) = x$.

Oss. Se $f : dom(f) \to Im(f)$ è invertibile, allora $f^{-1} \circ f = Id|_{dom(f)}$, e $f \circ f^{-1} = Id|_{Im(f)}$.

Esempi. Calcolo di funzioni inverse.

16.03.2007

Oss. Sia $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to Im(f) \subseteq \mathbb{R}$, invertibile. Allora il grafico della funzione inversa, $f^{-1} : Im(f) \to dom(f)$, si ottiene dal grafico di f mediante simmetria rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, $y = x$.

def. (*Funzioni monotone*) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) $f(x)$ si dice *monotona crescente* se
$\forall\ x_1, x_2 \in dom(f)$, t.c. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

(ii) $f(x)$ si dice *monotona crescente in senso stretto* se
$\forall\ x_1, x_2 \in dom(f)$, t.c. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

(iii) $f(x)$ si dice *monotona decrescente* se
$\forall\ x_1, x_2 \in dom(f)$, t.c. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

(iv) $f(x)$ si dice *monotona decrescente in senso stretto* se
$\forall\ x_1, x_2 \in dom(f)$, t.c. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

(v) $f(x)$ si dice *monotona (in senso stretto)* se è monotona crescente o decrescente (in senso stretto)

Esempi

Teo. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è monotona in senso stretto su $I \subseteq \mathbb{R}$, allora è invertibile su I. (dim.)

Funzioni elementari

- x^n, $n \in \mathbb{N}$ (*potenza a esponente naturale*): $dom(x^n) = \mathbb{R}$
  se $n = 2k+1$, dispari, la funzione è dispari, monotona crescente, invertibile. Grafico
  se $n = 2k$, pari, la funzione è pari, decresce su $\mathbb{R}^-$ e cresce su $\mathbb{R}^+$, invertibile SOLO su $\mathbb{R}^-$o su $\mathbb{R}^+$. Grafico

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ (*potenza a esponente relativo, negativo*): $dom(x^{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  se $n = 2k + 1$, dispari, la funzione è dispari, decresce su $\mathbb{R}^-$ e decresce su $\mathbb{R}^+$, MA NON è monotona su tutto $\mathbb{R}$; è comunque invertibile. Grafico
  se $n = 2k$, pari, la funzione è pari, cresce su $\mathbb{R}^-$ e decresce su $\mathbb{R}^+$, invertibile SOLO su $\mathbb{R}^-$o su $\mathbb{R}^+$. Grafico

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ (*potenza a esponente razionale positivo*): si definisce come funzione inversa di x^n, laddove sia invertibile.
  se $n = 2k+1$, dispari, $x^n = x^{2k+1}$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, e $Im(x^n) = \mathbb{R}$. Pertanto, $dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}$, è una funzione dispari, monotona crescente. Grafico

se $n = 2k$, pari, $x^n = x^{2k}$ è invertibile solo su $\mathbb{R}^+$, e $Im(x^n) = \mathbb{R}^+$. Pertanto, $dom(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}^+$, ed è una funzione monotona crescente. Grafico

Oss. Per definizione, $\sqrt[2n]{x^{2n}} = x$ se $x \geq 0$. Ma La funzione $\sqrt[2n]{x^{2n}}$ è definita anche per $x < 0$!. Si osserva facilmente che $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

Esercizi su disequazioni irrazionali. Esercizi sul calcolo dell'immagine di funzioni e sul calcolo della funzione inversa. Funzioni definite a tratti e loro inverse.

FUNZIONI TRASCENDENTI

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Che senso ha 2^π? Mediante le proprietà delle potenze, sappiamo dare senso a $x^\alpha, \forall \ x \geq 0$ e $\forall \ \alpha \in \mathbb{Q}$.

Teo. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Cioè , $\forall \ x \in \mathbb{R}$ e $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $|x - \frac{p}{q}| < \varepsilon$.

Questo Teorema assicura che 'posso approssimare' ogni numero reale mediante un numero razionale, con precisione piccola a piacere.

20.03.2007

Potenza con esponente irrazionale

Sia $x > 0$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$. Definiamo

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} \geq \alpha \right\} \\ B &= \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} \leq \alpha \right\}, \end{aligned}$$

e siano

$$\begin{aligned} \overline{x^\alpha} &= \inf \{x^a, a \in A\} \\ \underline{x^\alpha} &= \sup \{x^b, b \in B\} \end{aligned}$$

Vale il seguente

Teo. $\overline{x^\alpha} = \underline{x^\alpha} := x^\alpha$.

def. (*funzione esponenziale*)
Sia $a > 0$ fissato. Definiamo *funzione esponenziale di base a* la funzione

$$\begin{aligned} a^x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

1) $a^x > 0 \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}$; $a^0 = 1$
2) Base $a > 1$. Allora a^x è monotona crescente in senso stretto, quindi è invertibile .

3) Base $0 < a < 1$. Allora a^x è monotona decrescente in senso stretto, quindi è invertibile.

Grafici

Proprietà degli esponenziali Siano $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$.
1) $a^0 = 1, \;\; a^1 = a$
2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4)$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
5) $(a^x)^y = a^{xy}$
6) $(ab)^x = a^x b^x$

Utilizzando il concetto di limite, che indtrodurremo in seguito, introduciamo il seguente numero

def. (*Il numero di Nepero*)
$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e è un numero irrazionale, le cui prime cifre decimali sono $2,7182813....$

def. (*funzione logaritmica*)
Sia $a > 0, a \neq 1$ fissato. Definiamo *logaritmo in base a di x*, $\log_a x$, la funzione inversa di a^x. Pertanto

$$\begin{array}{rcl} \log_a x : (0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a x = y \;\; : \;\; a^y = x \end{array}$$

1) $dom(\log_a x) = (0, +\infty)$; $\log_a 1 = 0$
2) Base $a > 1$. Allora $\log_a x$ è monotona crescente in senso stretto.
3) Base $0 < a < 1$. Allora $\log_a x$ è monotona decrescente in senso stretto.

Grafici

Proprietà dei logaritmi Siano $a > 0, x, y > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
1) $\log_a 1 = 0, \;\; \log_a a = 1$
2) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3) $\log_a(\frac{1}{x}) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$
4)$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$
5) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
6) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Notazione Se non specificato, si sottointende che la base del logaritmo sia il numero e.

Pertanto, nel seguito utilizzerò la seguente convenzione:$\log x = \log x = \ln x = \log_e x$

Identità fondamentali Siano $a, b > 0, x > 0$.
1) $a^x = b^{a \log_b x}$; in particolare, $a^x = e^{a \log x}$
2) $a = \log_b (b^a)$; in particolare, $a = \log (e^a)$.

Oss. Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora $\log_a (x^{2n}) = 2n \log_a x$ per $x > 0$.
Tuttavia, $\log_a (x^{2n})$ è definito su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$! Vale:

$$\log_a (x^{2n}) = 2n \cdot \log_a |x| \quad \forall \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esercizi su disequazione esponenziali e logaritmiche. Determinazione del dominio e calcolo di funzione inversa di funzioni che coinvologono esponenziali e logaritmi.

23.03.2007

Richiami di trigonometria

Sia data una famiglia di circonferenze concentriche nel piano, ed un angolo al centro α fissato. È noto che la lunghezza dell'arco di circonferenza corrispondente all'angolo al centro α è proporzionale al raggio della circonferenza stessa. Ovvero, il rapporto $\frac{l(\widehat{AB})}{r}$ è costante al variare del raggio r (dove indichiamo con $\widehat{AB}$ l'arco di circonferenza corrispondente ad α).

def. Si definisce *misura in radianti* dell'angolo α il rapporto $\frac{l(\widehat{AB})}{r}$.

Pertanto, abbiamo la seguente corrispondenza tra angoli in gradi ed in radianti:

0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

def. Nel piano cartesiano si definisce *circonferenza goniometrica* la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1. Ovvero, è il luogo dei punti del piano che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Oss. I punti della circonferenza goniometrica sono in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0, 2\pi)$: ogni angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ individua un punto P sulla circonferenza goniometrica, e, viceversa, ad ogni punto P della circonferenza goniometrica corrisponde un unico angolo al centro $\alpha \in [0, 2\pi)$.

def. Sia $\alpha \in [0, 2\pi)$ e sia $P(x, y)$ il punto corrispondente sulla circonferenza goniometrica. Definiamo

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= y \ \text{(ordinata del punto } P) \\ \cos\alpha &= x \ \text{(ascissa del punto } P) \\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Diamo alcuni valori.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Identità fondamentale

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Formule di addizione e duplicazione

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Oss. Se $\alpha \geq 2\pi$ oppure $\alpha < 0$, allora esistono $\beta \in [0, 2\pi)$ e $k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\alpha = \beta + 2k\pi$. Pertanto, il punto P che si ottiene percorrendo la circonferenza goniometrica in senso antiorario (se $\alpha \geq 2\pi$) o in senso orario (se $\alpha < 0$) è lo stesso punto che corrisponde a β (abbiamo fatto qualche giro in più!). Quindi, è possibile definire $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ anche per angoli $\alpha \notin [0, 2\pi)$

def. (*funzioni circolari o trigonometriche*)
Definiamo *funzione seno* la funzione

$$\begin{aligned}
\sin x : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\
x &\mapsto \sin x
\end{aligned}$$

Definiamo *funzione coseno* la funzione

$$\begin{aligned}
\cos x : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\
x &\mapsto \cos x
\end{aligned}$$

Definiamo *funzione tangente* la funzione

$$\begin{aligned}
\tan x : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} &\longrightarrow [-1, 1] \\
x &\mapsto \tan x
\end{aligned}$$

Grafici

Oss.

$$\begin{aligned}
\sin(x + 2k\pi) &= \sin x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \ \ \forall\ \ k \in \mathbb{Z} \\
\cos(x + 2k\pi) &= \cos x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \ \ \forall\ \ k \in \mathbb{Z} \\
\tan(x + k\pi) &= \tan x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \ \ \forall\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

In altri termini, le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π, mentre la funzione $\tan x$ è periodica di periodo π.

def. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che *f(x) è una funzione periodica* se esiste un $\tau > 0$ t.c. $f(x + k\tau) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Si dice che *f è periodica di periodo T* se T è il più piccolo τ che soddisfa la precedente uguaglianza.

Esempi. Calcolo del periodo per funzioni circolari dilatate o sommate.

Funzioni trigonometriche inverse

Oss. Una funzione periodica NON è mai invertibile! Lo è al più su un periodo.

La funzione $\sin x$ è invertibile sull'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

def. (*funzioni arcoseno*)
Definiamo *funzione arcoseno* la funzione

$$\begin{array}{rcl} \arcsin x : [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y & \mapsto & x : \sin x = y \text{ e } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{array}$$

Esempi. Grafico.

La funzione $\cos x$ è invertibile sull'intervallo $[0, \pi]$.

def. (*funzioni arcocoseno*)
Definiamo *funzione arcocoseno* la funzione

$$\begin{array}{rcl} \arccos x : [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ y & \mapsto & x : \cos x = y \text{ e } x \in [0, \pi]. \end{array}$$

Esempi. Grafico.

La funzione $\tan x$ è invertibile sull'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

def. (*funzioni arcotangente*)
Definiamo *funzione arcotangente* la funzione

$$\begin{array}{rcl} \arctan x : \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y & \mapsto & x : \tan x = y \text{ e } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{array}$$

Esempi. Grafico.

Disequazioni trigonometriche. Esercizi su domini di funzioni.

27.03.2007

Esercizi di riepilogo sul calcolo del dominio di funzioni composte con logaritmi, radicali, valori assoluti...
Calcolo della funzione inversa.

CALCOLO DIFFERENZIALE

Limiti

Notazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $r > 0$. Indichiamo con $I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ l'intorno centrato in x_0 di raggio r.

Sia $k > 0$. Indichiamo con $I(+\infty, k) = (k, +\infty)$ l'intorno di $+\infty$ che dista k dall'origine.

Sia $k > 0$. Indichiamo con $I(-\infty, k) = (-\infty, -k)$ l'intorno di $-\infty$ che dista k dall'origine.

def. (*Punto di accumulazione.*) Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 si dice *punto di accumulazione per* A se

$$\forall\ I(x_0, r) \Rightarrow I(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

(cioè, se per ogni intorno I di x_0 esiste almeno un punto di A, diverso da x_0, nell'intorno I.)

Oss. 1) Dire che per ogni intorno I di x_0 esiste almeno un punto di A, diverso da x_0, nell'intorno I, equivale a dire che per ogni intorno I di x_0 esistono infiniti punti di A nell'intorno I.

Oss. 2) Sia $A = (a, b)$, oppure $A = (a, b]$, oppure $A = [a, b)$, oppure $A = [a, b]$. Allora ogni $a \leq x \leq b$ è punto di accumulazione per A.

Introduzione al concetto di limite. Alcuni esempi.

D'ora in poi consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

def. Limite finito per x che tende ad un valore finito
Siano $x_0, l \in \mathbb{R}$ t.c. $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione per $dom(f)$. Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(l, \varepsilon)\ \exists\ \ I(x_0, \delta)$ t.c. $\forall\ x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l, \varepsilon)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

def. Limite infinito per x che tende ad un valore finito
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e x_0 sia un punto di accumulazione per $dom(f)$.

1) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(+\infty, k)\ \exists\ \ I(x_0, \delta)$ t.c. $\forall\ x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(+\infty, k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k > 0\ \exists\ \ \delta = \delta(x_0, k)$ t.c. $\forall\ x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > k$.

2) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(-\infty, k)\ \exists\ I(x_0, \delta)$ t.c. $\forall\ x \in I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(-\infty, k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, k)$ t.c. $\forall\ x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$.

def. Limite finito per x che tende all'infinito
Sia $l \in \mathbb{R}$.

1) Diciamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(l, \varepsilon)\ \exists\ I(+\infty, M)$ t.c. $\forall\ x \in I(+\infty, M) \Rightarrow f(x) \in I(l, \varepsilon)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M = M(\varepsilon)$ t.c. $\forall\ x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

2) Diciamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(l, \varepsilon)\ \exists\ I(-\infty, M)$ t.c. $\forall\ x \in I(-\infty, M) \Rightarrow f(x) \in I(l, \varepsilon)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M = M(\varepsilon)$ t.c. $\forall\ x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

def. Limite infinito per x che tende all'infinito
Sia $l \in \mathbb{R}$.

1) Diciamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(+\infty, k)\ \exists\ I(+\infty, M)$ t.c. $\forall\ x \in I(+\infty, M) \Rightarrow f(x) \in I(+\infty, k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k > 0\ \exists\ M = M(k)$ t.c. $\forall\ x > M \Rightarrow f(x) > k$.

2) Diciamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(+\infty, k)\ \exists\ I(-\infty, M)$ t.c. $\forall\ x \in I(-\infty, M) \Rightarrow f(x) \in I(+\infty, k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k > 0\ \exists\ M = M(k)$ t.c. $\forall\ x < -M \Rightarrow f(x) > k$.

3) Diciamo che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(-\infty,k)\ \exists\ \ I(+\infty,M)$ t.c. $\forall\ x\in I(+\infty,M)\Rightarrow f(x)\in I(-\infty,k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k>0\ \exists\ \ M=M(k)$ t.c. $\forall\ x>M\Rightarrow f(x)<-k.$

4) Diciamo che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
se

1) (*def. topologica*) $\forall\ I(-\infty,k)\ \exists\ \ I(-\infty,M)$ t.c. $\forall\ x\in I(-\infty,M)\Rightarrow f(x)\in I(-\infty,k)$

2) (*def. analitica*) $\forall\ k>0\ \exists\ \ M=M(k)$ t.c. $\forall\ x<-M\Rightarrow f(x)<-k.$

Alcuni esempi.

30.03.2007

Notazione Indichiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$

Teo. *Unicità del limite*
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di $dom(f)$.
Il $\lim_{x\to x_0} f(x)$, se esiste, è unico. (dim.)

Algebra dei limiti
Siano $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di $dom(f)$ e di $dom(g)$.
Supponiamo che esistano, finiti, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$.
Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll}
1) & \lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \\
2) & \lim\limits_{x\to x_0}(cf)(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \quad \text{per ogni } c\in\mathbb{R} \\
3) & \lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)) \\
4) & \lim\limits_{x\to x_0}(f/g)(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))/(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)) \quad \text{se } \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0
\end{array}$$

Alcuni limiti: $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. Limiti di polinomi.
Funzioni che non ammettono limite.

Teo. dei 2 carabinieri
Siano $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Sia $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $dom(f), dom(g), dom(h)$
Supponiamo che esista un intorno $I(x_0,r)$ tale che
$$f(x)\leq h(x)\leq g(x) \qquad \text{per ogni } x\in I(x_0,r)\setminus\{x_0\}$$
Inoltre, supponiamo che esistano finiti $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ e che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Allora esiste finito $\lim_{x\to x_0} h(x)$, e

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

(dim.)

Teo. del confronto
Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $dom(f), dom(g)$
Supponiamo che esista un intorno $I(x_0, r)$ tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{per ogni } x \in I(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

1) Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$, e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(x)$, e

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

2) Se esiste $\lim_{x\to x_0} g(x)$, e

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$$

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$, e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Esempi.

Applicazione del teo. dei 2 carabinieri: il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Teo. *Limite di funzioni composte*
Siano $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ t.c. $Im(g) \subset (c, d))$
Sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che:
1)$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$
2)$y_0 \in (c, d)$
3) $\exists \lim_{y\to y_0} f(x) = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Applicazione: limiti per sostituzione. Esempi

Limite destro e sinistro

def. Limite finito da destra Diciamo che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

se

(*def. analitica*) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

def. Limite infinito da destra
1) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$
se

(*def. analitica*) $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

2) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$
se

(*def. analitica*) $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

def. Limite finito da sinistra Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$
se

(*def. analitica*) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

def. Limite infinito da destra
1) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$
se

(*def. analitica*) $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > M$.

2) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$
se

(*def. analitica*) $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ t.c. $\forall\ x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) < -M$.

Esempi.

03.04.2007

Ancora calcolo di limiti desto/sinistro utilizzando la definizione.

def. $y = l$ *è asintoto orizzontale* a $+\infty$ (o a $-\infty$) per $f(x)$ se
$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad (\text{ oppure, rispettivamente } \exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = l)$$

def. $x = x_0$ *è asintoto verticale* per $f(x)$ se

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/o} \ \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Esempi

Funzioni elementari: limiti agli estremi del dominio

- $f(x) = x^n$. $dom(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} n &= 2k, \quad \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^{2k} = +\infty \\ n &= 2k+1, \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^{2k+1} = +\infty \end{aligned}$$

- $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

$$\begin{aligned} n &= 2k, \quad dom(f) = [0,+\infty) \quad \Rightarrow \lim_{x\to0^+} x^{1/2k} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/2k} = +\infty \\ n &= 2k+1, \quad dom(f) = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{1/(2k+1)} = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/(2k+1)} = +\infty \end{aligned}$$

- $f(x) = x^{-n} = 1/x^n$. $dom(f) = \mathbb{R}\setminus 0 = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\begin{aligned} n &= 2k, \quad \Rightarrow \lim_{x\to0^\pm} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2k}} = 0 \\ n &= 2k+1, \quad \Rightarrow \lim_{x\to0^\pm} \frac{1}{}x^{2k+1} = \pm\infty \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{2k+1}} = 0 \end{aligned}$$

Quindi: $x = 0$ è asintoto verticale e $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

- $f(x) = a^x$. $dom(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a &> 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ 0 &< a < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \end{aligned}$$

Quindi: $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, se $a > 1$, e a $+\infty$, se $0 < a < 1$.

- $f(x) = \log_a x$. $dom(f) = (0,+\infty)$.

$$\begin{aligned} a &> 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \\ 0 &< a < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x - \infty \end{aligned}$$

Quindi: $x = 0$ è asintoto verticale.

Esercizi sui limiti.

Limite notevole: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Prop. *Limite di funzioni razionali*
Siano $P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_0$ e $Q_m(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0$ due polinomi di grado, rispettivamente, n e m. Allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p_n x^n}{q_m x^m}.$$

Esercizi. Applicazione della stessa tecnica anche a funzioni algebriche (cioè contenenti potenze a esponente razionale).

Continuità

def. *Continuità in un punto*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 u punto di accumulazione di $dom(f)$ e sia $x_0 \in dom(f)$.
Diciamo che $f(x)$ *è continua in* x_0 se

1) $\exists\ \lim_{x\to x_0} f(x)$, finito

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Oss. Attenzione: per parlare di continuità in x_0, $f(x)$ DEVE essere definita in x_0!!

def. *Continuità in un punto da destra o da sinistra*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 u punto di accumulazione di $dom(f)$ e sia $x_0 \in dom(f)$.
Diciamo che $f(x)$ *è continua in* x_0 *da destra (o da sinistra)* se

1) $\exists\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, finito (o, rispettivamente, $\exists\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, finito)

2) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (o, rispettivamente, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

def. *Continuità in un intervallo*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $I \subset dom(f)$ un intervallo contenuto in $dom(f)$.
Diciamo che $f(x)$ *è continua in* I se $\forall\ x_0 \in I$ $f(x)$ è continua in x_0.

Notazione: $f \in \mathcal{C}(I)$ o $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Esempi di funzioni continue e non.

Prop. Le funzioni elementari sono continue nel loro intervallo di definizione.

def. *Punto di discontinuità*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di $dom(f)$ e sia $x_0 \in dom(f)$.

Diciamo che x_0 *è un punto di discontinuità* per $f(x)$ se $f(x)$ NON è continua in x_0.

Classificazione dei punti di discontinuità.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di $dom(f)$ e sia $x_0 \in dom(f)$.

1. x_0 si dice *punto di discontinuità eliminabile* se
$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ \text{ finito}, \quad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ \text{ finito},$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$$

2. x_0 si dice *punto di discontinuità di tipo salto* o *di I specie* se
$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \ \text{ finito}, \quad \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ \text{ finito},$$
$$ma \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

3. x_0 si dice *punto di discontinuità di II specie* in tutti gli altri casi, cioè se si verifica almeno uno dei seguenti casi
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad -\infty, \\ &\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad -\infty, \\ &\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ &\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x). \end{aligned}$$

Esempi.

13.04.2007

Teo. Algebra delle funzioni continue

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in un punto x_0 (rispettivamente, continue in un intervallo I). Allora:

$$\begin{aligned} &1) \quad f \pm g \text{ è continua in } x_0 \quad (\text{ rispett., in } I) \\ &2) \quad c \cdot f \text{ è continua in } x_0 \quad (\text{ rispett., in } I), \forall\, c \in \mathbb{R} \\ &3) \quad f \cdot g \text{ è continua in } x_0 \quad (\text{ rispett., in } I) \\ &4) \quad f/g \text{ è continua in } x_0 \quad (\text{ rispett., in } I), g(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Corollario

1) I polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$.

2) Le funzioni date da rapporto di polinomi sono continue, ove definite.

Teo. *Continuià di funzioni composte*

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $Im(g) \subset dom(f)$

1) Sia $x_0 \in dom(g)$. Supponiamo che:
g continua in x_0
f continua in $y_0 = g(x_0)$
Allora

$$f \circ g \text{ è continua in } x_0$$

2) Sia $I \subset dom(g)$. Supponiamo che:
g continua su I
f continua su $g(I)$
Allora

$$f \circ g \text{ è continua in } I$$

Qualche esercizio

I teoremi sulle funzioni continue

Teo. Continuità e monotonia
Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona in senso lato in I.

(i) Se $I = (a, b)$, allora $\forall\ x_0 \in (a, b)$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_-$$
$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_+$$

(ii) Se $I = (a, +\infty)$, allora vale (i) e

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

(ii) Se $I = (-\infty, b)$, allora vale (i) e

$$\exists \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Corollario
Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona in senso lato in I. Allora i punti di discontinuità di f in I sono tutti di tipo salto.

Teo. Invertibilità di una funzione continua
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continua su (a, b). Allora

$$f \text{ invertibile} \Leftrightarrow f \text{ monotona in senso stretto}$$

Teo. Continuità della funzione inversa

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continua su (a, b) e strettamente monotona su (a, b). Allora

$$f^{-1} : Im(f) \to (a, b) \quad \text{è continua su } Im(f)$$

Corollario

Le funzioni inverse delle funzioni elementari sono continue.

Teo. degli zeri

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $f \in \mathcal{C}([a, b])$

2) $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora esiste un punto $c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = 0$

Teo. dei valori intermedi o di Darboux

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $f \in \mathcal{C}([a, b])$

2) Siano $S = \sup_{[a,b]} f(x)$, $s = \inf_{[a,b]} f(x)$

Allora f assume tutti i valori compresi tra s e S. Ovvero:

$$\forall \ y \in (s, S) \exists \ x \in [a, b] : f(x) = y$$

Teo. di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $f \in \mathcal{C}([a, b])$

2) f è limitata su $[a, b]$

Allora f ha massimo e minimo assoluti su $[a, b]$. Ovvero: esistono $x_m \in [a, b], x_M \in [a, b]$:

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M \quad \forall \ x \in [a, b].$$

Le ipotesi del Teorema di Weierstrass sono essenziali: controesempi nel caso in cui cada una delle ipotesi

Algebra degli infiniti e forme di indeterminazione

1) $(\pm\infty) \pm (\ell) = \pm\infty \quad \forall\, \ell \in \mathbb{R}$

2) $\ell \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases}$

3) $\dfrac{\infty}{\ell} = \infty \quad \forall\, \ell \in \mathbb{R}$

4) $\dfrac{\ell}{\infty} = 0 \quad \forall\, \ell \in \mathbb{R}$

5) $\dfrac{\ell}{0} = \infty \quad \forall\, \ell \neq 0$

6) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty; \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty; \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty; \qquad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Forme di indeterminazione di tipo algebrico

$$[+\infty - \infty]; \quad [0 \cdot \infty]; \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Esempi.

o piccolo

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, fissato.

def. Si dice che f *è o piccolo di* g *per* $x \to x_0$, e si scrive

$$f = \mathrm{o}(g) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se e solo se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 0$$

Si dice anche che f *è infinitesima rispetto a* g *per* $x \to x_0$.

Osservazioni sulla definizione. Esempi.

Esempi notevoli:

1) $x^n = \mathrm{o}(x^m)$ per $x \to 0$ se e solo se $n > m$

2) $x^n = \mathrm{o}(x^m)$ per $x \to \infty$ se e solo se $n < m$

3) $f = \mathrm{o}(1)$ per $x \to x_0$ se e solo se $f \to 0$ per $x \to x_0$, cioè se f è *infinitesima* per $x \to x_0$

Algebra degli o piccoli

Sia $x \to x_0$. Allora:

1) $\mathrm{o}(-f) = \mathrm{o}(f)$; $\quad c \cdot \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(cf) = \mathrm{o}(f)$; $\quad \mathrm{o}(f) + \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$; $\quad \mathrm{o}(f) - \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$;

2) $f \cdot \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(fg)$;

3) $\mathrm{o}(f) + \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$; $\quad \mathrm{o}(f) - \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f)$;

4) $\mathrm{o}(\mathrm{o}(f)) = \mathrm{o}(f)$.

Esempi

Limiti e o piccolo

$$f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g) \quad \text{per } x \to x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Primi esempi

Limiti notevoli e sviluppi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sin x = x + \mathrm{o}(x) \quad \text{per } x \to 0 \\
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{per } x \to 0 \\
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \tan x = x + \mathrm{o}(x) \quad \text{per } x \to 0 \\
\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \arctan x = x + \mathrm{o}(x) \quad \text{per } x \to 0
\end{aligned}$$

17.04.2007

Esercizi: limiti risolti con l'utilizzo degli o piccoli.

Forme di indeterminazione di tipo esponenziale

$$\left[1^{+\infty}\right]; \quad \left[0^0\right]; \quad \left[\infty^0\right]$$

Teo. Il numero e

1) Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ esiste finito

2) Definiamo $e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

3) $e\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Cioè, il numero di Nepero e è un numero irrazionale.

Limiti notevoli e sviluppi che si deducono dal numero e

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\\
&\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \qquad \Longrightarrow \log(1+x)=x+\mathrm{o}(x) \quad \text{per } x\to 0\\
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \Longrightarrow e^x=1+x+\mathrm{o}(x) \quad \text{per } x\to 0\\
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \Longrightarrow (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\mathrm{o}(x) \quad \text{per } x\to 0, \forall\ \alpha\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Esercizi.

Teo. Scala degli infiniti

Per $x\to+\infty$,

$$(\log_b x)^\beta \ll x^\gamma \ll a^{\alpha x} \quad \forall\ \alpha,\beta,\gamma>0 \quad \forall\ a,b>1.$$

Ovvero, $\forall\ \alpha,\beta,\gamma>0 \quad \forall\ a,b>1$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_b x)^\beta}{x^\gamma}=0 \quad \Longrightarrow (\log_b x)^\beta=\mathrm{o}\left(x^\gamma\right) \quad x\to+\infty\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\gamma}{a^{\alpha x}}=0 \quad \Longrightarrow x^\gamma=\mathrm{o}\left((\log_b x)^\beta\right) \quad x\to+\infty
\end{aligned}$$

Esercizi.

Dai limiti sopra elencati si ottengono i seguenti limiti notevoli:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x^\gamma|\log_b x|^\beta=0 \quad \Longrightarrow |\log_b x|^\beta=\mathrm{o}\left(x^{-\gamma}\right) \quad x\to 0^+, \quad \forall\ \gamma,\beta>0, \quad \forall\ b>1\\
&\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|^\gamma}{a^{\alpha x}}=0 \quad \Longrightarrow a^{\alpha x}=\mathrm{o}\left(|x|^\gamma\right) \quad x\to-\infty, \quad \forall\ \gamma,\alpha>0, \quad \forall\ a>1.
\end{aligned}$$

20.04.2007

Esercizi di riepilogo

def. funzioni equivalenti o asintotiche

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che *$f$ è asintotica (o equivalente) a g* per $x \to x_0$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$$

In simboli,

$$f \sim g \quad \text{per } x \to x_0.$$

Esempi e osservazioni.

Prop. Limiti e $\sim$

$$f \sim g \quad \text{per } x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g$$

Prop. Limiti e o piccolo

$$f \sim g \quad \text{per } x \to x_0 \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + \mathrm{o}(g) \quad \text{per } x \to x_0$$

Attenzione! Il simbolo $\sim$ va utilizzato con molta"delicatezza": non si mantiene per somme, esponenziali...

def. Asintoto obliquo

Sia $f : dom(f) \to \mathbb{R}$ una funzione t.c $dom(f)$ contiene un intorno di $+\infty$ (cioè, $(a, +\infty) \subset dom(f)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$).

Diciamo che *f(x) ha asintoto obliquo di equazione y=mx+q a* $+\infty$ se e solo se

$$f(x) \sim mx + q \quad \text{per} x \to +\infty$$

ovvero, se e solo se

$$f(x) = mx + q + \mathrm{o}(1) \quad \text{per} x \to +\infty$$

Equivalentemente, possiamo dire che f ha asintoto obliquo se e solo se

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= m \\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) &= q \end{aligned}$$

Un esempio.

Derivata

Problemi introduttivi: velocità media e velocità istantanea di un punto mobile su una retta; retta tangente ad una curva piana.

def. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I. Per ogni $x_1 \in I$, chiamiamo *rapporto incrementale di* f *in* x_0 la quantità

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Geometricamente, il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico di f nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. L'equazione della retta secante è dunque

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

def. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I. Diciamo che f *è derivabile in* x_0 se esiste finito

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale limite viene detto *derivata di* f *in* x_0:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} |_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometricamente, la derivata di f in x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente il grafico di f nel punti $(x_0, f(x_0))$. L'equazione della **retta tangente** è dunque

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Esempi: calcolo di derivate con definizione.

def. Derivata destra e sinistra

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I. Diciamo che f *è derivabile in* x_0 *da destra* se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale limite viene detto *derivata destra di* f *in* x_0:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I. Diciamo che f *è derivabile in* x_0 *da sinistra* se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tale limite viene detto *derivata sinistra di f in x_0*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Prop. f è derivabile in x_0 se e solo se è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Esempio di funzione non derivabile in un punto: $|x|, x_0 = 0$.

Oss. 2. Sempre da definizione, segue che

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0).$$

La quantità

$$df = f'(x_0)dx$$

df viene detto *differenziale di f* e rappresenta la parte lineare (rispetto a dx) dell'incremento infinitesimo di f quando $x \to x_0$:

$$f(x) - f(x_0) = df + \mathrm{o}(dx)$$

24.04.2007

Esercizi di ricapitolazione in preparazione al I compitino: dominio, limiti agli estremi del dominio, determinazione di asintoti, invertibilità, calcolo della funzione inversa, continuità.

27.04.2007

Esercizi sul calcolo di derivate mediante la definizione; rette tangenti.

Teo. (dim.)

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Longrightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Punti di non derivabilità.
Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (a,b), e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora:

- x_0 si dice *punto angoloso* se

$$\begin{gathered}
\exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_+(x_0) \quad \text{finito} \\
\exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_-(x_0) \quad \text{finito} \\
f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)
\end{gathered}$$

-
- x_0 si dice *punto a tangente verticale* se

$$\begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \\ \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \\ \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \end{cases}$$

- x_0 si dice *punto di cuspide* se

$$\begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \\ \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \\ \exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \end{cases}$$

Esempi.

def. Funzione derivata

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto (a, b). Definiamo *funzione derivata* la funzione

$$\begin{aligned} f' : (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Calcolo di rette tangenti.

Teo. Derivata come limite di derivate

Sia $f : [x_0, b) \to \mathbb{R}$ continua in $[x_0, b)$ e derivabile in (x_0, b).

1. se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l_+$ finito, allora f è derivabile da destra in x_0 e $f'_+(x_0) = l_+$

2. se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$, allora $\lim_{x\to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \pm\infty$ e f presenta un punto a tangente verticale in x_0

3. se $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ allora NON si può concludere nulla sulla derivabilità di f in x_0!!

Derivata di funzioni definite a tratti

Teo. Algebra delle derivate (dim.)

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a, b)$ (oppure: derivabili in (a, b)), e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

04.05.2007

Esercizi su calcolo di derivate di prodotti e quozienti; applicazione al calcolo di rette tangenti.

Teo. Derivata della funzione composta

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e siano:
$f : I(x_0) \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di x_0, derivabile in x_0
$g : J(y_0) \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, derivabile in y_0.
Allora, se esiste, $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Esercizi sul calcolo di derivate di funzioni composte. Derivata di $g(x)^{f(x)}$. Applicazioni al cacolo di rette tangenti.

Teo. Derivata della funzione inversa

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua su (a, b) e strettamente monotona su (a, b).
Sia f derivabile in $x_0 \in (a, b)$.
Sia $f'(x_0) \neq 0$
Allora la funzione inversa di f, f^{-1}, è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e vale

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Calcolo delle derivate delle funzioni trigonometriche inverse:

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= \frac{1}{x^2+1} \\
\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

Esercizi di riepilogo.

08.05.2007

Applicazioni della derivata

def. Max e min locali e assoluti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$, punto interno ad I.

1) x_0 si dice *punto di massimo locale per* f se esiste un intorno $J(x_0)$ di x_0 t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in J(x_0)$$

2) x_0 si dice *punto di minimo locale per* f se esiste un intorno $J(x_0)$ di x_0 t.c.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in J(x_0)$$

3) x_0 si dice *punto di massimo assoluto per* f *su* I se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I$$

4) x_0 si dice *punto di minimo assoluto per* f *su* I se

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in I$$

Esempi (anche funzioni definite a tratti) e osservazioni.

def. Estremanti locali e assoluti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$, punto interno ad I.

1) x_0 si dice *estremante locale per* f se è un punto di massimo o minimo locale.

2) x_0 si dice *estremante assoluto per* f *su* I se è un punto di massimo o minimo assoluto per f su I.

Richiamo teo. Weierstass (p. 22 Diaro Lezioni) e esempi in cui NON sono verificate le ipotesi.

Teo. Fermat (dim.)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (a, b)$
Se f è derivabile in x_0 e x_0 è un estremante locale per f, allora $f'(x_0) = 0$.

NON vale il viceversa: in generale, x_0 estremante per f NON implica $\exists\ f'(x_0)$ e $f'(x_0) = 0$!! Controesempio.

def. punto stazionario

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno ad I.
x_0 si dice *punto stazionario o punto critico per* f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Teo. Rolle (dim.)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Sia $f(a) = f(b)$.
Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$.

Teo. Lagrange o dei valori intermedi (dim.)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Significato geometrico: il teo. di Lagrange afferma che esiste un punto x_0 in cui la tangenete al grafico della funzione è parallela alla retta secante il grafico f nei punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Le ipotesi del Teo. di Lagrange sono tutte necessarie: esempi che illustrano come, cadendo una delle ipotesi, il teorema non sia più valido.

Teo. f' e monotonia (dim.)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

Allora:

1) $f'(x) > 0$ su $(a, b) \Rightarrow f$ strettamente crescente su $[a, b]$

1) $f'(x) \geq 0$ su $(a, b) \Leftrightarrow f$ non decrescente su $[a, b]$

1) $f'(x) < 0$ su $(a, b) \Rightarrow f$ strettamente decrescente su $[a, b]$

1) $f'(x) \leq 0$ su $(a, b) \Leftrightarrow f$ non crescente su $[a, b]$

11.05.2007

Dimostrazione del teo. precedente.

Corollario 1. Caratterizzazione della funzione costante (dim.)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Allora

$$f(x) = c \quad \forall\ x \in [a, b] \quad \Longleftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall\ x \in (a, b)$$

Corollario 2. Test per ricerca estremanti (dim.)
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.
Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Sia $f'(x_0) = 0$ in $x_0 \in (a, b)$.
Allora

i)

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall\, x \in (a, x_0) \\ f'(x) > 0 & \forall\, x \in (x_0, b) \end{cases} \Longrightarrow x_0 \text{ punto di minimo locale per } f$$

ii)

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall\, x \in (a, x_0) \\ f'(x) < 0 & \forall\, x \in (x_0, b) \end{cases} \Longrightarrow x_0 \text{ punto di massimo locale per } f$$

Esercizi su monotonia, determinazione di estremanti locali ed assoluti su un dato intervallo.

Studio di funzione e grafico qualitativo: schema

1) Dominio di f e eventuali simmetrie

2) Limiti alla frontiera del dominio. Ricerca di eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui.

3) Studio del segno di f (eventuale)

4) Derivata prima. Dominio di f', studio del segno di f' e determinazione degli intervalli di monotonia di f. Ricerca estremanti. Analisi degli eventuali punti di non derivabilità

(punti angolosi, a tangente verticale, cuspidi)

5) Derivata seconda (eventuale). Dominio di f'', studio del segno di f'' e determinazione della concavità di f e degli eventuali punti di flesso (vedere lezione successiva).

Esercizi su studi di funzione (SENZA derivata seconda)

15.05.2007

Derivate di ordine superiore

def. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su (a,b), e sia $x_0\in(a,b)$.
f si dice *derivabile 2 volte* in x_0 se esiste, finito,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Tale limite si dice *derivata seconda di f in x_0*; in simboli,

$$f''(x_0)=\frac{d^2f}{dx^2}|_{x_0}=\frac{d^2}{dx^2}f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se la funzione f ammette derivata seconda *in ogni* punto dell'intervallo (a,b), si definisce *funzione derivata seconda* la funzione

$$\begin{array}{rcl} f'':(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f''(x) \end{array}$$

Il processo può essere iterato, costruendo così le derivate n-sime di f, $f^{(n)}(x)$

def. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile $n-1$ volte su (a,b), e sia $x_0\in(a,b)$.
f si dice *derivabile n volte* in x_0 se esiste, finito,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

Tale limite si dice *derivata n-sima di f in x_0*; in simboli,

$$f^{(n)}(x_0)=\frac{d^nf}{dx^n}|_{x_0}=\frac{d^n}{dx^n}f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x_0+h)-f^{(n)}(x_0)}{h}$$

Esempi. Interpretazione cinematica: accelerazione istantanea.

def. funzione convessa o concava

Sia $f:I\to\mathbb{R}$. f si dice *convessa* (rispettivamente, *concava*) su I se e solo se per ogni coppia $x_1<x_2$, $x_1,x_2\in I$, il segmento di estremi $P_1=(x_1,f(x_1))$ e $P_2=(x_2,f(x_2))$ sta sempre SOPRA (rispettivamente, SOTTO) il grafico di f.

Analiticamente:

$$f(x_t)\le z_t \quad \forall\ t\in[0,1]$$

dove

$$\begin{aligned} x_t &= (1-t)x_1 + tx_2 \\ z_t &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \end{aligned}$$

Teo. convessità e derivata seconda

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte su (a,b). Allora

$$f \text{ convessa su } (a,b) \Longleftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$$

$$f \text{ concava su } (a,b) \Longleftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$$

Esempi.

def. punto di flesso

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in (a,b)$ t.c. esiste $f'(x_0)$, finito o meno.
x_0 si dice *punto di flesso* se esistono $I_-(x_0), J_+(x_0)$ t.c.

$$\begin{aligned} &f(x) \text{ convessa (risp., concava) su } I_-(x_0) \\ &f(x) \text{ concava (risp., convessa) su } J_+(x_0) \end{aligned}$$

Nel punto di flesso x_0 la funzione "attraversa" la retta tangente al grafico di f in x_0.

Prop. 1

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
$x_0 \in (a,b)$ sia un punto di flesso
$\exists\ f''(x_0)$

Allora $f''(x_0) = 0$

Prop. 2

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte su (a,b), e sia $x_0 \in (a,b)$.
Sia $f''(x_0) = 0$.
Se esistono $I_-(x_0), J_+(x_0)$ t.c.

$f''(x) > 0$ su $I_-(x_0)$ (risp., $f''(x) < 0$) e

$f''(x) < 0$ su $J_+(x_0)$ (risp., $f''(x) > 0$)

allora x_0 è un punto di flesso.

Esercizi: studi di funzione con studio della convewssità.

Teo. f'' e ricerca estremanti

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte su (a,b), e sia $x_0 \in (a,b)$.
Sia $f'(x_0) = 0$.
Allora

i) se $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ è un punto di minimo locale

ii) se $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ è un punto di massimo locale

Il teo. del l'Hopital

Teo.

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, t.c.:

i) $\exists \ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$ oppure ∞

ii) f, g derivabili su (a, b)

iii) $g'(x) \neq 0$ su (a, b)

iv) $\exists \displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito o meno

Allora

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempi.

Attenzione!

1) Si applica SOLO a forme di indeterminazione, e NON a tutti i quozienti!

2) Si applica SOLO a forme di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, e NON alle altre forme!

3) Il teorema NON afferma che $\frac{f}{g}$ e $\frac{f'}{g'}$ hanno SEMPRE lo stesso comportamento!!!

18.05.2007

Esercizi. Teo. de l'Hopital: quando e come usarlo, quando NON usarlo.

Sviluppi di Taylor

def. fattoriale

Per ogni $n \geq 1$ intero, si definisce $n!$ (n fattoriale) come segue:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 1$$

Si definisce $0! = 1$.

Teo. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora:

1) Esiste un unico polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall \ k = 0...n$$

$T_n(x)$ viene detto *polinomio di Taylor di ordine n, centrato in* x_0, ed è dato dalla formula (*formula di Taylor*)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(k_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

2) Il polinomio di Taylor è caratterizzato dalla seguente proprietà

$f(x) = T_n(x) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$ *(sviluppo di Taylor con resto secondo Peano)*

Ovvero, $T_n(x)$ è l'UNICO polinomio ad avere questa proprietà (approssimare $f(x)$ in un intorno di x_0 con un errore dell'ordine di $\mathrm{o}((x - x_0)^n)$

Gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0 = 0$ prendono il nome di *sviluppi di Mc Laurin.*
In formule:

Sviluppo di Taylor con centro x_0, di ordine n:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Sviluppo di Taylor con centro x_0, di ordine n:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Calcolo di alcuni sviluppi notevoli:

1. $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n), \qquad x \to 0$

2. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n), \qquad x \to 0$

3. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0$

4. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \qquad x \to 0$

5. $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0$

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n), \qquad x \to 0$

7. $(1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n), \qquad x \to 0$

   dove $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

22.05.2007

Esercizi: limiti con sviluppi di Taylor, sviluppi di funzioni composte e di prodotti di funzioni.

Funzioni primitive

Introduzione: l'operazione di derivazione è invertibile?

Prop. (dim)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Allora

$$\{F : I \to \mathbb{R} : F \text{ derivabile e } F'(x) = f(x)\} = \{F(x) = F_0(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

dove $F_0(x)$ è una funzione, fissata, t.c. $F_0'(x) = f(x)$

def. Funzione primitiva su un intervallo

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. $F : I \to \mathbb{R}$ si dice *funzione primitiva di* f *su* I se

1) F è derivabile in I

2) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{I}$

Quindi: le primitive di una funzione su un intervallo, se esistono, coincidono a meno di una costante.

def. integrale indefinito

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Se esiste, si definisce *integrale indefinito su* I l'insieme delle funzioni primitive di f su I. In simboli,

$$\int f(x)dx = \{F : I \to \mathbb{R} : F \text{ derivabile e } F'(x) = f(x)\}$$

Prop.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Se esiste,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

dove $F(x)$ è UNA particolare primitiva di $f(x)$ su I.

1)Quando esiste la primitiva?

2) Come calcolarla?

Teo.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$, intervallo chiuso e limitato.

Allora

$$\text{esiste} \quad \int f(x)dx \quad \text{su } [a, b]$$

Esempio di una funzione che NON ammette primitiva su un intervallo.

Tabella primitive delle funzioni elementari

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	c
1	$x+c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + c$
e^x	e^x+c
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$

25.05.2007

Prop.

L'integrale indefinito è lineare: per ogni $f, g : I \to \mathbb{R}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} \int (f+g)(x)dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int (c \cdot f)(x)dx &= c \cdot \int f(x)dx \end{aligned}$$

Esercizi su integrali immediati

Teo. integrazione per sostituzione (dim.)

Siano I, J due intervalli e siano

1) $g : J \to I$ una funzione continua e derivabile in J, con derivata continua

2) $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con primitiva $\int f(t)dt = F(t) + c$

Allora

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + c \quad \text{in } J$$

Oss. Il teorema può essere anche letto in senso inverso: dovendo calcolare $\int f(x)dx$, a volte è comodo operare la sostituzione $x = \varphi(t)$, con φ funzione opportuna, riconducendosi a

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt;$$

il problema diventa, quindi, determinare l'integrale a II membro.

Esercizi.

Teo. integrazione per parti (dim.)

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili, con derivata continua in I. Allora

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Esercizi.

29.05.2007

Esercizi di riepilogo su integrazione per sostituzione e per parti.

Cenni sull'integrazione delle funzioni razionali

Vogliamo determinare le primitive delle funzioni del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove $P(x), Q(x)$ sono due polinomi. Tratteremo SOLO IL CASO

$$\deg Q(x) \leq 2.$$

1) Se $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, operando la divisione di polinomi si può riscrivere $f(x)$ come

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

dove $R(x)$ è il resto della divisione e $S(x)$ è il risultato;

2) il problema diventa dunque determinare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

dove $\deg P < \deg Q$.

3) Se $\deg Q(x) = 1$, allora

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x - x_0}dx$$

la cui primitiva è nota:

$$\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\log|x-x_0| + c$$

4) Se deg $Q(x) = 2$, allora

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

A seconda del valore di $\triangle = b^2 - 4ac$, si opera modo diverso:

4i) $\triangle > 0$. Allora $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, ed è sempre possibile scomporre la frazione come segue

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{x-x_2}$$

Il calcolo dell'integrale è ora immediato:

$$\int \left(\frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{x-x_2}\right) dx = C\log|x-x_1| + D\log|x-x_2| + c$$

4ii) $\triangle = 0$. Allora $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$, ed è sempre possibile scomporre la frazione come segue

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{(x-x_1)^2}$$

Il calcolo dell'integrale è ora immediato:

$$\int \left(\frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{(x-x_1)^2}\right) dx == C\log|x-x_1| - \frac{D}{x-x_1} + c$$

4iii) $\triangle < 0$. Allora ax^2+bx+c è irriducibile, e, mediante il completamento del quadrato, può essere riscritto come $ax^2+bx+c = a[(x-x_1)^2+k^2]$.
Trattiamo SOLO il caso in cui a numeratore ci sia una COSTANTE!!
Si scompone la frazione come segue

$$\frac{A}{ax^2+bx+c} = \frac{D}{(x-x_1)^2+k^2}$$

Il calcolo dell'integrale è ora immediato:

$$\int \left(\frac{D}{(x-x_1)^2+k^2}\right) dx = \frac{D}{k}\arctan\left(\frac{x-x_1}{k}\right) + c$$

Esercizi.

L'integrale di Riemann

La teoria classica dell'integrazione, dovuta a Riemann, considera SOLO funzioni reali a variabile reale t.c.:

1) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cioè, f è definita su un intervallo CHIUSO e LIMITATO

2) f è LIMITATA su $[a, b]$: cioè, $\exists\ M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall\ x \in [a, b]$.

Problema: calcolo dell'area della regione di piano compresa tra l'intervallo $[a, b]$ sull'asse delle x e il grafico della funzione $f(x)$.

def. Partizione Si chiama *partizione* dell'intervallo $[a, b]$ un insieme FINITO e ORDINATO di punti $\{x_0, x_1, x_2, ...x_N\}$ t.c.:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$$

Definiamo *ampiezza dell'intervallo i-simo della partizione* il valore

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad , i = 1...N$$

Poichè f è limitata su $[a, b]$, lo è anche su $[x_{i-1}, x_i]$; quindi esistono

$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x); \quad m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

def. somme di Riemann

Si definisce *somma di Riemann superiore relativa alla funzione f e alla partizione P* la quantità

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$$

Si definisce *somma di Riemann inferiore relativa alla funzione f e alla partizione P* la quantità

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i$$

Significato geometrico: area dei plurirettangoli superiori e inferiori.

Se definiamo

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x),$$

si verifica facilmente che

$$m(b - a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b - a)$$

Si osservi che le due limitazioni sono INDIPENDENTI dalla partizione P!!

def. raffinamento

Siano P_1, P_2 due partizioni di $[a, b]$. *P_2 è un raffinamento di P_1* se

$$P_2 \subset P_1$$

Proprietà dei raffinamenti.

Sia P_2 un raffinamento di P_1. Allora

$$m(b-a) \leq s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \leq S(f, P_2) \leq S(f, P_1) \leq M(b-a)$$

def. integrale di Riemann superiore e inferiore

Si definisce *integrale superiore di Riemann di f sull'intervallo* $[a, b]$ il valore

$$\overline{\int_{[a,b]}} f(x)dx = \inf_P S(f, P)$$

Si definisce *integrale inferiore di Riemann di f sull'intervallo* $[a, b]$ il valore

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)dx = \sup_P s(f, P)$$

def. integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata su $[a, b]$. Si dice che f *è Riemann integrabile su* $[a, b]$, e si scrive

$$f \in \mathcal{R}(a, b)$$

se e solo se

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)dx = \overline{\int_{[a,b]}} f(x)dx$$

Tale valore viene detto *integrale di Riemann di f su* $[a, b]$, e si indica con il simbolo

$$\int_{[a,b]} f(x)dx$$

Significato geometrico: area della regione di piano compresa tra il segmento $[a, b]$ e il grafico di $f(x)$ (caso in cui $f > 0$)
Esempi:

1) La funzione costante, $f(x) = c \ \forall \ x \in [a, b]$ è sempre Riemann integrabile:

$$f(x) = c \in \mathcal{R}(a, b) \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} c dx = c(b-a)$$

2) La funzione di Dirichlet NON è Riemann integrabile:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases} \qquad f \notin \mathcal{R}(0, 1)$$

Problemi aperti:

1) Quali funzioni sono in $\mathcal{R}(a, b)$?

2) Se $f \in \mathcal{R}(a, b)$, come calcolo $\int_{[a,b]} f(x)dx$?

Teo. CNS per Riemann integrabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata su $[a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}(a, b)$ se e solo se

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ P_\varepsilon : \quad 0 < S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Teo. condizioni sufficienti per Riemann integrabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata su $[a, b]$. Allora:

1) f continua su $a, b \implies \quad f \in \mathcal{R}(a, b)$

2) f monotona su $a, b \implies \quad f \in \mathcal{R}(a, b)$

01.06.2007

Proprietà dell'integrale di Riemann

Siano $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Allora:

1. $f(x) \geq 0$ su $[a, b]$, $a < b \implies \int_{[a,b]} f(x)dx \geq 0$

2. $f(x) \leq 0$ su $[a, b]$, $a < b \implies \int_{[a,b]} f(x)dx \leq 0$

3. $f(x) \geq g(x)$ su $[a, b]$, $a < b \implies \int_{[a,b]} f(x)dx \geq \int_{[a,b]} g(x)dx$

4. l'integrale è lineare:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) \in \mathcal{R}(a,b) \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} (f+g)(x)dx &= \int_{[a,b]} f(x)dx + \int_{[a,b]} g(x)dx \\ (c \cdot f)(x) \in \mathcal{R}(a,b) \quad \forall\ c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} (c \cdot f)(x)dx &= c \cdot \int_{[a,b]} f(x)dx\end{aligned}$$

5. additività rispetto all'intervallo di integrazione:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,c]} f(x)dx + \int_{[c,b]} f(x)dx \quad \forall\ a < c < b$$

6. se $a < b$ allora $\left|\int_{[a,b]} f(x)dx\right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)|dx$

Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e continua a tratti, cioè continua tranne in un numero FINITO di punti. Allore $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

def. integrale definito secondo Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, sia $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Si definisce *integrale definito secondo Riemann di f su [a,b]* il seguente valore:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)dx & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -\int_{[a,b]} f(x)dx & \text{se } a > b. \end{cases}$$

Oss. Per $\int_a^b f(x)dx$ valgono le stesse proprietà 1)-6).

Esempi ed esercizi.

Significato geometrico: $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta il valore dell'area CON SEGNO della regione di piano compresa tra il segmento $[a, b]$ sull'asse delle x e il grafico di $f(x)$.

Calcolo dell'area di una regione piana sottesa al grafico di una funzione:

1) $f(x) \geq 0$ su $[a, b] \Longrightarrow \mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$

2) $f(x) \leq 0$ su $[a, b] \Longrightarrow \mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx$

3) $f(x)$ cambia segno su $[a, b] \Longrightarrow$ l'area va calcolata suddividendo l'intervallo di integrazione nei sottointervalli sui quali f mantiene lo stesso segno, e utilizzando le precedenti proprietà

Se, ad esempio, $f \geq 0$ su $[a, c]$ e $f \leq 0$ su $[c, b]$, allora

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Come si calcola $\int_a^b f(x)dx$? Esempio di un integrale definito calcolato secondo definizione.

def. funzione localmente integrabile

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo QUALSIASI (cioè, limtitato o meno, aperto o chiuso...)
$f(x)$ si dice *localmente integrabile su I*, e si scrive $f \in \mathcal{R}_{loc}(I)$ se

$$\forall\ [a, b] \subset I, \quad [a, b] \text{ chiuso e limitato} \Longrightarrow f \in \mathcal{R}(a, b)$$

def. funzione integrale

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}(I)$, e sia $a \in I$. Si definisce *funzione integrale* la funzione

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Esempi ed osservazioni.

Prop.

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}(I)$, e sia $a \in I$.
La funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è continua su I.

Teo. fondamentale del calcolo integrale (dim.)

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}(I)$, e sia $a \in I$, I intervallo.

Supponiamo che f sia continua in x_0 punto INTERNO ad I. Allora:

1) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile in x_0, e

2) $F'(x_0) = f(x_0)$.

05.06.2007

Corollario
Sia $f : I \to \mathbb{R}$, e sia $a \in I$, I intervallo.

Supponiamo che f sia continua e derivabile su I. Allora

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

Teo. formula fondamentale del calcolo integrale (dim.)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $a \in I$, I intervallo.

Supponiamo che f sia continua in I, e sia $G(x) : I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Osservazioni: legame tra integrale definito e indefinito, siginificato di dx, cambio di variabile nell'integrale definito.

Esercizi.