Corso di Laurea in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Es. di Analisi Matematica 1, A.A. 2007/2008, II turno

C. Tarsi

Diario delle esercitazioni

Gli esercizi contrassegnati con (∗) sono ..difficilini..!

26.09.2007

Breve presentazione.
Richiami sul concetto di funzione e di grafico.
Legame tra proprietà di funzioni e proprietà dei grafici.
Rassegna dei grafici delle funzioni elementari (convenzione: n, m primi tra loro):

- $y = mx + q$ ($x = c$ non è una funzione!)
- $y = ax^2 + bx + c$
- $y = x^n, n = 2h, h \in \mathbb{N}$
- $y = x^n, n = 2h + 1, h \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} < 1, n = 2h + 1, m = 2k + 1, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} < 1, n = 2h, m = 2k + 1, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} < 1, n = 2h + 1, , m = 2k, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} > 1, n = 2h + 1, m = 2k + 1, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} > 1, n = 2h, m = 2k + 1, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{\frac{n}{m}}, \dfrac{n}{m} > 1, n = 2h + 1, m = 2k, h, k \in \mathbb{N}$

Esempi: grafico di

$$y = 5x^7; \quad y = 2x^4; \quad y = \sqrt[5]{x^3}; \quad y = \sqrt[3]{x^2}; \quad y = \sqrt[4]{x^3}; \quad y = \sqrt[3]{x^5}; \quad y = \sqrt[3]{x^4}; \quad y = \sqrt[2]{x^3}$$

1.10.2007

Grafici delle funzioni elementari (convenzione: n, m primi tra loro):

- $y = x^{-\frac{n}{m}}, , n = 2h + 1, m = 2k, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^{-\frac{n}{m}}, , n = 2h, m = 2k + 1, h, k \in \mathbb{N}$

- $y = x^{-\frac{n}{m}}, , n = 2h+1, m = 2k+1, h, k \in \mathbb{N}$
- $y = x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Esempi: grafico di

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}};$$
$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}; \quad y = x^{2007\pi}; \quad y = x^{\frac{\pi}{2007}}$$

Atenzione nelle semplificazioni tra radici e potenze!

$$\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x} \quad \text{ma} \quad \sqrt[4]{x^2} \neq \sqrt{x}!$$

Invece

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$$

Grafici di

$$y = |x|; \quad y = \mathrm{sgn}(x); \quad y = [x]; \quad y = x - [x]; \quad y = [\ln x]$$

Traslazioni, riflessioni, composizioni con $|\cdot|$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A partire dal grafico di $y = f(x)$ ricaviamo il grafico di

- $y = f(x) + T$ traslazione verticale
- $y = f(x + T)$ traslazione orizzontale
- $y = f(-x)$ riflessione rispetto all'asse y
- $y = -f(x)$ riflessione rispetto all'asse x
- $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$

Esempi: grafici di

$$\begin{aligned} y &= ||x+1|-1| \\ y &= f(x), \quad y = |f(x-1)| \quad \text{con } f(x) = \sqrt[7]{x^4} - 1 \\ y &= f(g(x)), \quad y = g(f(x)) \quad \text{con } f(x) = |x+1|^{\pi}, \quad g(x) = \sqrt[4]{|x|} - 1 \end{aligned}$$

Richiami sul concetto di funzione periodica.
La somma di due funzioni periodiche è periodica? Esempi e controesempi:

$$\begin{aligned} y &= \sin 2x + \cos 3x \quad \text{è una funzione periodica; calcolo del periodo} \\ y &= \sin 2x + \cos \pi x \quad \text{NON è una funzione periodica!} \end{aligned}$$

Breve (molto breve!) richiamo sulle funzioni trigonometriche e sulle funzioni trigonometriche inverse.

Esercizi per casa

Calcolare:

- $\sin(\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}))$; $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3})$; $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3})$; $\arccos(\sin \frac{5\pi}{3})$

- $(*)$ disegnare il grafico di $y = \arcsin(\sin x)$

3.10.2007 *Ora facoltativa*

Esercizi svolti:

1. Mostrare che se $p \in \mathbb{N}$ è primo allora $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$
2. Mostrare che $\sqrt{30}$ non è razionale
3. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt{m}$ sia irrazionale. Allora $\sqrt{n} + \sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$
4. Siano $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Che cosa si può dire di
$$a + b,\quad \alpha + a,\quad \alpha + \beta,\quad a \cdot b,\quad \alpha \cdot \beta\ ?$$
5. (*I compitino 17.11.2006*) Sia $a > 0, a \neq 1$. Mostrare che $t = \dfrac{\log_a 5}{\log_a 3}$ non è razionale.
6. (*Tema d'esame 30.1.2007*) Una retta del piano si dice "razionale" se non contiene l'origine e interseca entrambi gli assi in punti razionali. Dimostare che il punto di intersezione di due rette "razionali" deve avere entrambe le coordinate razionali.

8.10.2007 Esercizi svolti:

1. Correzione di alcuni esercizi lasciati per casa.
2. Richiami sulle funzioni iperboliche e sulle funzioni iperboliche inverse.
3. Determinare, se esistono, $\max, \sup, \min, \inf$ dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
   (a) $E = \{x \in \mathbb{R} :\ x = 6 - \dfrac{1}{n^2+1}\}$
   (b) $E = \{x \in \mathbb{R} : 2 < \cosh x \leq 3\}$
   (c) $E = \{x \in \mathbb{R} : [e^x] = 3\}$
   (d) $E = \{(-1)^n(\frac{3n-2}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$
   (e) $E = \{\cos(\pi n) - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   (f) $E = \{x \in \mathbb{Q}^+ :\ 2 \leq x^2 \leq 4\}$

(g) $E = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in [1,2)\}$ dove $f(x) = 2 - \log(|x| - 1)$

(h) $E = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x = \sin t, \ t \in (0, \frac{3}{4}\pi)\}$

(i) $E = \{x \in \mathbb{R} : \ x = \dfrac{m}{n}, \ m < n, \ m, n \in \mathbb{N}\}$

4. Determinare la forma algebrica e trigonometrica di

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2i}$$

e disegnarlo sul piano complesso.

10.10.2007 *Ora facoltativa*

Esercizi svolti:

1. Determinare, se esistono, $\max, \sup, \min, \inf$ dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

   (a) $E = \{\frac{n^2+2n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $E = \mathbb{N} \cap \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 8 \geq 6x\}$

   (c) $E = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 3^n - \dfrac{1}{n^2}, \ \ n \in \mathbb{N}\}$

   (d) $E = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x = |t^2 - 4t|, \ t \in (-1, 5)\}$

2. Determinare, se esistono, $\max, \sup, \min, \inf$ dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

   (a) $E = \{5^{x/y} : x \in [1,2), y \in (-3,-2]\}$

   (b) $E = \{5^{x/y} : x \in [1,2), y \in (-3,0)\}$

   (c) $E = \{5^{x/y} : x \in [1,2), y \in (-3,0) \cup (0,3)\}$

3. Siano X un insieme non vuoto, $f : X \to \mathbb{R}^+$ una funzione. Dimostrare che $\sup(f^2) = \sup(f)^2$

4. Determinare, se esistono, $\max, \sup, \min, \inf$ dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

   (a) $E = \{x|y-1| : x \in (0,2], y \in (-3,2]\}$

15.10.2007

1. Determinare, se esiste, $\max, \sup, \min, \inf$ di
   $E = \{z \in \mathbb{R} : \ z = x \ y, \ \ x, y \in \mathbb{R} - 2 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y < 0\}$

   Numeri complessi: forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Rappresentazione nel piano complesso. Prodotto, quoziente e potenza di un numero complesso: significato geometrico (rotazione).

2. Determinare la forma algebrica e trigonometrica di

$$\frac{(1+i)(2-2i)}{\sqrt{3}+i}$$

3. Determinare forma trigonometrica e forma algebrica dei seguenti numeri:

$$-5, \qquad -2i \qquad (i-1)^7, \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{327}$$

Attenzione!

$|z|$ è la distanza del punto z (in $\mathbb{C}$) dall'origine

$|z-(a+ib)| = d(z, a+ib)$ è la distanza del punto z (in $\mathbb{C}$) da $a+ib$

Quindi:

- $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-(a+ib)| = r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, è la circonferenza centrata in $a+ib$ di raggio r

- $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-(a+ib)| < r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, è la regione interna alla circonferenza centrata in $a+ib$ di raggio r (bordo *escluso*)

- $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-(a+ib)| \leq r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, è la regione interna alla circonferenza centrata in $a+ib$ di raggio r (bordo *compreso*)

- $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-(a+ib)| \geq r\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, è la regione esterna alla circonferenza centrata in $a+ib$ di raggio r (bordo *compreso*)

- $E = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-(a+ib)| < r_2\}$, $r1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, è la corona circolare centrata in $a+ib$, di raggio interno r_1 e raggio esterno r_2

- $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-(a+ib)| = |z-(c+id)|\}$ è l'asse del segmento avente per estremi i punti $a+ib$ e $c+id$

- $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < a\}$, $a \in \mathbb{R}$ è un semipiano

etc....

4. Disegnare sul piano complesso le immagini dei seguenti insiemi

   (a) $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z-i+1) \leq 2\pi\}$

   (b) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = |z-1|\}$

   (c) $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2i| \leq 4\}$

   (d) $E = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \geq 3\right\}$

5. Risolvere l'equazione $w^4 = (\sqrt{3}+i)^4$.

   Svolto in due modi:

   (i) determiniamo il numero $z = (\sqrt{3}+i)^4$; calcoliamo poi le 4 radici quarte di z, ovvero
   $$|w_k| = \sqrt[4]{|z|}, \quad \arg(w_k) = \frac{\arg z + 2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3$$

   (ii) metodo "geometrico":
   $$w_k = \sqrt[4]{(\sqrt{3}+i)^4} = (\sqrt{3}+i)\sqrt[4]{1} = (\sqrt{3}+i)\sqrt[4]{1} = (\sqrt{3}+i)u_{\alpha_k}, \;\; k = 0,1,2,3$$
   dove u_{α_k} sono le 4 radici quarte dell'unità,
   $$\begin{aligned} u_{\alpha_0} &= 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1; \quad u_{\alpha_1} = 1(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = i; \\ u_{\alpha_2} &= 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1; \quad u_{\alpha_3} = 1(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) = -i \end{aligned}$$
   Si noti: $(\sqrt{3}+i)$ è una delle 4 radici quarte del numero z (la "fondamentale"). Geometricamente, quindi, abbiamo ottenuto le radici quarte prendendone una particolare e ruotandola 4 volte di un angolo pari a $2\pi/4$ (=moltiplicandola per u_{α_k})

6. Sia
   $$z = \frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}$$
   (a) Determinare la forma algebrica e trigonometrica di z

   (b) Determinare l'insieme $A = \{w \in \mathbb{C} : \;\; (iw)^3 = -z\}$

   (c) (Per casa) Stabilire se l'insieme $B = \{w \in \mathbb{C} : \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; w^n = z\}$ è finito, infinito numerabile, oppure infinito non numerabile.

17.10.2007 *Ora facoltativa*

Esercizi svolti:

1. Disegnare sul piano complesso le immagini dei seguenti insiemi

   (a) $E = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z+2+2i)| < \frac{\pi}{4}\}$

   (b) (*) $E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \dfrac{z+i}{z+1-i} \in \mathbb{R} \right\}$

   Sugg.: si scriva z in forma algebrica, $z = x+iy$, e poi si scriva in forma algebrica il numero $w = \frac{z+i}{z+1-i}$ (cioè $w = \mathrm{Re}w + i\mathrm{Im}w$, con $\mathrm{Re}w$, $\mathrm{Im}w \in \mathbb{R}$). A questo punto basta imporre che Imw=0...

2. Siano
   $$\begin{aligned} E &= \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-2i|\} \\ W &= \{w \in \mathbb{C} : |w-2+2i| = |w+2-2i|\} \end{aligned}$$
   Determinare gli elementi di $E \cap W$

3. Determinare tutti e soli i numeri complessi z tali che l'equazione

$$(w-z)^3 = 8i$$

ammetta $w = \sqrt{3} + 2i$ come soluzione

Sugg.: gli z cercati sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $(\sqrt{3}+2i-z)^3 = 8i$...

4. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso

   (a) $z^4 - \bar{z} = 0$

   Sugg.: $z = 0$ è soluzione. Moltiplicando l'equazione data per z, si ottiene $z^5 - |z|^2 = 0$. si scriva ora z in forma esponenziale, cioè $z = \rho e^{i\theta}$....

   (b) $z|z|^2 = 1 + i$

22.10.2007

1. Brevissima introduzione alla "funzione" logaritmo (che poi funzione non è...) nel campo complesso. Calcolo di

$$\log(-1); \quad \log(i); \quad \log(-3i)$$

2. Correzione esercizio 6(c) di Lu 15.10.07

3. Sia

$$w_0 = \frac{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)}{1+i}$$

Sia $E = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z < 0 < \mathrm{Im}(z)\}$. Quante soluzioni dell'equazione $z^{12} = w_0$ appartengono all'insieme E?

4. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni in campo complesso

   (a) $(z+i)^2 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

   (b) $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$

   (c) $(z+1)^6 = (1-2z)^6$

5. Scomporre il seguente polinomio nel prodotto di tre fattori quadratici a coefficienti reali

$$z^6 + 1$$

Cenno alla scomposizione di polinomi a coefficienti reali nel prodotto di fattori di grado 1 e di grado 2 irriducibili:

- dato $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + z_0$, polinomio di grado n a coefficienti reali ($a_k \in \mathbb{R}$), se z_0 è soluzione dell'equazione $P(z) = 0$, anche $\overline{z}$ lo è; quindi, ogni polinomio a coefficienti reali ha sempre un numero pari (o nullo) di soluzioni complesse.

- risolvendo l'equazione $P(z) = 0$, si può scomporre

$$P(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1)..(z - z_n)$$

- le soluzioni $z_i \in \mathbb{R}$ danno luogo a binomi di grado 1 a coefficienti reali

- le coppie di soluzioni complesse coniugate danno luogo ai trinomi di grado 2 irriducibili in $\mathbb{R}$:

$$(z - z_i)(z - \bar{z}_i) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_i) \cdot z + |z_i|^2$$

6. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni nel campo complesso

$$z^4 = (1 + i)^4;$$

$$z^4 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{100}$$

7. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^3 - i + 1) = 2, \mathrm{Im}(2z^3 - 1 - i) = 1\}$.
   Sia $B = \{z^3, z \in A\}$

   (a) Scrivere gli elementi di B
   (b) Quanti elementi di A sono nel I quadrante?
   (c) Esiste un numero $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che l'insieme $C = \{\alpha z, z \in A\}$ abbia almeno 2 elementi nel I quadrante?

8. Disegnare nel piano complesso le immagini dei seguenti insiemi

   (a) $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \mathrm{Im} z \geq 0\}$
   (b) $E_1 = \{w \in \mathbb{C} : w = z^2, z \in E\}$
   (c) $E_2 = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z, z \in E\}$

24.10.2007 *Ora facoltativa*

Esercizi svolti:

1. Disegnare sul piano complesso le immagini dei seguenti insiemi

   (a) $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 8, \mathrm{Re} z < \mathrm{Im} z\}$
   Basta notare che $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 8, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5}{4}\pi\}$
   (b) $E_1 = \{w \in \mathbb{C} : w = (1 + i)z, z \in E\}$
   $E_1 = \left\{w \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |w| < 8\sqrt{2}, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi\right\}$
   (c) $E_2 = \{w \in \mathbb{C} : w = z^3, z \in E\}$
   $E_2 = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 8^3\}$!

(d) $E_3 = \left\{w \in \mathbb{C} : w^3 = z, z \in E\right\}$

$$E_3 = \left\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, \frac{\pi}{12} < \arg z < \frac{5}{12}\pi\right\} \cup$$
$$\cup \left\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, \frac{3}{4}\pi < \arg z < \frac{13}{12}\pi\right\} \cup$$
$$\cup \left\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 2, \frac{17}{12}\pi < \arg z < \frac{19}{12}\pi\right\}$$

2. Scomporre il seguente polinomio nel prodotto di due fattori quadratici a coefficienti reali

$$16z^4 + 1$$

3. (SOLO ACCENNATO) Sia $E = \{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{z} = -z + 2i\}$. Determinare e rappresentare graficamente:

   (a) $E_1 = \{w \in \mathbb{C} : (1+i)w = z, z \in E\}$
   (b) $E_2 = \left\{w \in \mathbb{C} : 3w = z^3, z \in E\right\}$
   (c) $E_3 = \left\{w \in \mathbb{C} : w^3 = z, z \in E\right\}$

4. (27.04.05) Sia $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Allora

   (a) $\mathrm{Re}(z^2) =$ ......; $\quad \mathrm{Im} z^2 =$ .... ($z^2 = [\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}]^2 = ...$)
   (b) La forma trigonometrica di z^2 è:.........
   (c) La forma trigonometrica di z è:.............. (basta notare che z è UNA delle due determinazioni di $\sqrt{z^2}$)

5. Sia $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Disegnare nel piano complesso le immagini dei seguenti insiemi

   (a) $E = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : z = w_0^n, \frac{1}{2} < |z| < 4, \}$
   (b) $E_1 = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : z = (\sqrt{2}w_0)^n, \frac{1}{2} < |z| < 4, \}$
   (c) $(*)$ SOLO ACCENNATO
   Esiste $\alpha \in \mathbb{C}$: $E_2 = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : z = (\alpha w_0)^n, \frac{1}{2} < |z| < 4, \}$ abbia cardinalità infinita?

   Sugg.:

   - Si osserva che deve essere $|\alpha| = 1$
   - Se $\frac{\arg \alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$, allora la cardinalità risulta ancora finita
   - Se invece $\frac{\arg \alpha}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$....

29.10.2007

1. Dim. che

$$\lim_{n\to+\infty} p^n \;=\; \begin{cases} +\infty, & p>1 \\ 1, & p=1 \\ 0, & 0<p<1 \end{cases}$$

   (per casa) Dim. che

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = \begin{cases} +\infty, & p>0 \\ 1, & p=0 \\ 0, & p<0 \end{cases}$$

   Cosa si può dire di

$$\lim_{n\to\infty} p^n \quad \text{se} \quad p<0?$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = \begin{cases} \text{non esiste} & p\le -1 \\ \\ 0, & -1<p<0 \end{cases}$$

2. Sia $\varepsilon_n > 0$ una successione infinitesima (cioé, tale che $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} p^{\varepsilon_n} = 1 \qquad \forall p>0$$

3. Sia a_n una successione t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = \sin a$$

   dim:

   (a) dim. che $\lim_{n\to+\infty} \sin\varepsilon_n = 0$ se $\varepsilon_n \to 0$, cioè se ε_n è una successione infinitesima;

   (b) dim. che $\lim_{n\to+\infty} \cos\varepsilon_n = 1$ se $\varepsilon_n \to 0$;

   (c) concludere la dim. con le formule di addizione della trigonometria.

4. Stabilire quali di queste successioni sono regolari e in tal caso calcolarne il limite

   (a) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$

   (b) $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n}-1}{\sqrt[4]{n}+1}$;

   (c) $a_n = \sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-1}$;

   (d) $a_n = \dfrac{\log^9 n + \sqrt{n}}{2^{-n} + \sqrt{n^2+1}}$.

   (e) $a_n = \dfrac{5^n + n^7}{(2n)! + 2\, n!}$;

   (f) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \log\left(\dfrac{3^n+n^2}{2^n+1}\right)$

   (g) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

Def. asintotico. Sia $\{b_n\} : b_n \neq 0$. Allora

$$a_n \sim b_n \text{ per } n \to \infty \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Attenzione! Non ha senso $a_n \sim 0$!!!
Esempi: $n^2 + 1 \sim n^2$ per $n \to \infty$; $\frac{n+1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$.

Oss. 1. Data una successione a_n, esistono infinite successioni b_n ad essa asintotica!
2. $\sim$ è una relazione di equivalenza nell'insieme delle successioni non nulle definitivamente:

(a) $a_n \sim a_n$
(b) $a_n \sim b_n \Longrightarrow b_n \sim a_n$
(c) $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Longrightarrow a_n \sim c_n$

Proprietà. Siano $a_n \sim \tilde{a}_n, b_n \sim \tilde{b}_n$ Allora:

(a) $c \cdot a_n \sim c \cdot \tilde{a}_n$ per ogni $c \neq 0$;
(b) $a_n b_n \sim \tilde{a}_n \tilde{b}_n$;
(c) $(a_n)^p \sim (\tilde{a}_n)^p$;
(d) $a_n/b_n \sim \tilde{a}_n/\tilde{b}_n$;
(e) $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = L$;
(f) $\text{sgn}(a_n) = \text{sgn}(\tilde{a}_n)$ definitivamente.

Attenzione!

(a) $a_n \sim \tilde{a}_n, b_n \sim \tilde{b}_n \not\Rightarrow a_n + b_n \sim \tilde{a}_n + \tilde{b}_n$.
Controesempio: $a_n = n^2 - n; b_n = \sqrt{n} - n^2$

(b) $a_n \sim \tilde{a}_n \not\Rightarrow e^{a_n} \sim e^{\tilde{a}_n}$
Controesempio: $a_n = n^2 + n$

(c) $a_n \sim \tilde{a}_n \not\Rightarrow \log a_n \sim \log \tilde{a}_n$
Controesempio: $a_n = \frac{n+1}{n}$

Però vale la seguente proposizione:

$$a_n \sim \tilde{a}_n, \quad a_n, \tilde{a}_n \to \infty \quad \text{o} \quad a_n, \tilde{a}_n \to 0 \Longrightarrow \log a_n \sim \log \tilde{a}_n$$

L'importante è che $a_n, \tilde{a}_n \not\to 1$!!!

(d) $\lim_n a_n = \lim_n \tilde{a}_n \not\Rightarrow a_n \sim \tilde{a}_n$
Controesempio: $a_n = \frac{1}{n}, \tilde{a}_n = \frac{1}{n^2}$

5. Stabilire quali di queste successioni sono regolari e in tal caso calcolarne il limite (svolti usando il simbolo di $\sim$)

   (a) $a_n = \sqrt{n} \log \dfrac{n+1}{n^2 - \log n}$

   (b) $a_n = \left(\frac{n+1}{n^3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

   (c) $a_n = \dfrac{\log(5n) - \log(n^3) - 3}{3\log(7n) - 1}$;

6. Calcolare il limite (se esiste) delle seguenti successioni:

   (a) $a_n = n^{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) $a_n = \dfrac{n^\alpha - \log n}{n^2 + 1}, \alpha \in \mathbb{R}$;

24.10.2007 *Ora facoltativa*

Esercizi svolti:

1. Sia $\varepsilon_n > 0$ una successione infinitesima (cioé, tale che $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n^p = 0 \qquad \forall p > 0$$

   Idea dim. Per ip. $\forall\, \eta > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\eta) : 0 < \varepsilon_n < \eta \quad \forall\, n > n_0$.

   La nostra ts. è: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1 = n_1(\varepsilon) : 0 < \varepsilon_n^p < \varepsilon \quad \forall\, n > n_1$, ovvero $0 < \varepsilon_n^p < \varepsilon^{1/p} \quad \forall\, n > n_1$.

   Basta quindi osservare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$:

$$\eta < \varepsilon^{1/p}!$$

2. Sia a_n una successione t.c. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^p = a^p$$

   per $a_n > 0$

   Sugg. Per $a = 0$ la ts. si riduce a quella del precedente esercizio. Per $a > 0$ si osserva che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^p = a^p \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{a}\right)^p$$

   Quindi è sufficiente dim. che se $c_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} c_n^p = 1....$$

3. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false

   (a) $a_n \to a, \implies \quad |a_n| \to |a| \quad$ (V)

   (b) $|a_n| \to |a|, \implies \quad a_n \to a \quad$ (F in generale; V se $a = 0$)

4. Stabilire quali di queste successioni sono regolari e in tal caso calcolarne il limite
   (a) $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$
   (b) $a_n = \dfrac{n}{n+1} + \cos(n\dfrac{\pi}{2})$
   (c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n^3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

5. Sia $\{a_n\} = \dfrac{2n}{n+1}\cos(\pi n)$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \quad |a_{2n} - 2| \le \varepsilon^2 \quad$ (V)
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \in \mathbb{R} : \exists n > M \quad |a_n - 2| \le \varepsilon^2 \quad$ (V)
   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M \in \mathbb{R} : \exists n > M \quad |a_n + 2| \le \varepsilon^2 \quad$ (V)
   (d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} : \exists n > m \quad 2 < a_n < 2 + \varepsilon^2 \quad$ (F)

05.11.2007

Richiami sui limiti notevoli

LIMITI NOTEVOLI CHE SI DEDUCONO DAL NUMERO e

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione tale che $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e \quad$ cioè $\quad (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \sim e \quad$ per $n \to \infty$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = 1 \quad$ cioè $\quad e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = \log a \quad$ cioè $\quad a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \log a \cdot \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1 \quad$ cioè $\quad \log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = \log_a e \quad$ cioè $\quad \log_a(1+\varepsilon_n) \sim \log_a e \cdot \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1}{\varepsilon_n} = \alpha \quad$ cioè $\quad (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \quad$ cioè $\quad \sinh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\tanh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1 \quad$ cioè $\quad \tanh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \quad$ per $n \to \infty$

ALTRI LIMITI NOTEVOLI .

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione tale che $\varepsilon_n \neq 0,\ \ \varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora:

1. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ cioè $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$

2. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos \varepsilon_n}{{\varepsilon_n}^2} = \frac{1}{2}$ cioè $1-\cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}\varepsilon_n^2$ per $n \to \infty$

3. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ cioè $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$

4. $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ cioè $\arctan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$

Calcolare il limite delle seguenti successioni

1. $\displaystyle a_n = \frac{n^4 \log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\sin n + n^2};$

2. $\displaystyle a_n = \frac{\log(n^5+1) - 5\log(n)}{\sin \frac{1}{n^5}};$

3. $\displaystyle a_n = n^\alpha \log\left(\frac{n^3+2n}{3n^2+n^3}\right);\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

4. $\displaystyle a_n = \frac{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1}.$

5. $\displaystyle a_n = n^2 \log\left(\frac{n-2}{n+2}\right) \log(2^n + n^2) \sin(2^{-n} + n^{-2})$

6. $\displaystyle a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n^3};$

7. $\displaystyle a_n = \frac{e^{n^\alpha} - 1}{(\log n)\log\left(1-\frac{2}{n}\right)};\qquad \alpha \in \mathbb{R};$

8. $\displaystyle a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2};$

9. $\displaystyle a_n = \frac{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n-2}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}-\log^5 n}\right)};$

10. (17.11.06)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} + \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\sqrt{n}}$$

07.11.2007 *Ora facoltativa*

Tenuta dalla dott. sa M. Calanchi
(si veda la sua home page, www.mat.unimi.it/users/calanchi)

19.11.2007

Il criterio della radice e del rapporto.

1. $\lim_{n\to\infty}(n!)^2 e^{-n^2}$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+\alpha n}{2n-1}\right)^n$

Def. "o piccolo". Sia $\{b_n\} : b_n \neq 0$. Allora

$$a_n = \mathrm{o}(b_n) \text{ per } n \to \infty \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Esempi:

- La classe degli infinitesimi : $\mathrm{o}(1) = \Big\{\{\{a_n\} : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\Big\}$
- $n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$ per $n \to +\infty$ se $0 < \alpha < \beta$
- $n^{-\alpha} = \mathrm{o}(n^{-\beta})$ per $n \to +\infty$ se $0 < \beta < \alpha$
- $\varepsilon_n^\alpha = \mathrm{o}(\varepsilon_n^\beta)$ per $n \to +\infty$ se $0 < \beta < \alpha$

Ossrvazioni:

- $\mathrm{o}(a_n)$ è una classe di successioni; $b_n = \mathrm{o}(a_n)$ NON è una guuaglianza in senso aritmetico, ma va letto come: ' b_n appartiene alla classe $\mathrm{o}(a_n)$'

Proprietà. Siano $a_n, b_n \neq 0$ definitivamente. Allora:

1. $-\mathrm{o}(a_n) = \mathrm{o}(a_n)$;
2. $\mathrm{o}(a_n) \pm \mathrm{o}(a_n) = \mathrm{o}(a_n)$;
3. $c \cdot \mathrm{o}(a_n) = \mathrm{o}(c \cdot a_n) = \mathrm{o}(a_n)$;
4. $\mathrm{o}(\mathrm{o}(a_n)) = \mathrm{o}(a_n)$;
5. $b_n \cdot \mathrm{o}(a_n) = \mathrm{o}(b_n \cdot a_n)$;
6. $\mathrm{o}(a_n + \mathrm{o}(a_n)) = \mathrm{o}(a_n)$;
7. $(\mathrm{o}(a_n))^k = \mathrm{o}(a_n^k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
8. $a_n \sim b_n \Rightarrow \mathrm{o}(a_n) = \mathrm{o}(b_n)$.

Utilizzo di " o piccolo" nei limiti:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + \mathrm{o}(a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Relazione tra asintotico e " o piccolo".

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + \mathrm{o}(b_n)$$

Oss. $\sim$ è una relazione di equivalenza nell'insieme delle successioni non nulle definitivamente, " o piccolo" NO.

Limiti notevoli e confronti fra infiniti scritti con il simbolo di "o piccolo"

1. $\log(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$
2. $e^{\varepsilon_n} = 1 + \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$
3. $\sin\varepsilon_n = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$
4. $\cos\varepsilon_n = 1 - \frac{1}{2!}\varepsilon_n^2 + \mathrm{o}(\varepsilon_n^2), \qquad n \to +\infty$
5. $\sinh\varepsilon_n = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$
6. $\cosh\varepsilon_n = 1 + \frac{1}{2!}\varepsilon_n^2 + \mathrm{o}(\varepsilon_n^2), \qquad n \to +\infty$
7. $\arctan\varepsilon_n = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$
8. $(1+\varepsilon_n)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n), \qquad n \to +\infty$

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left\{ \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}} - 1 + \frac{1}{n^3} \right\}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha \{\cos(\sin(\frac{1}{n})) - 1\}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \left\{ \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right\}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

21.11.2007 *Ora facoltativa*

1. Sia $\varepsilon_n \neq 0, \quad \varepsilon_n \to 0$. Quali tra queste relazioni sono vere ?

   (a) $\log\left(\dfrac{1+2\,\varepsilon_n}{1-2\,\varepsilon_n}\right) \sim 4\,{\varepsilon_n}^2 \quad (F)$

   (b) $\sin\dfrac{1}{\varepsilon_n} \sim \dfrac{1}{\varepsilon_n} \quad (F)$

   (c) ${\varepsilon_n}^2 \sin\dfrac{1}{{\varepsilon_n}^2} = o(\varepsilon_n) \quad (V)$

   (d) $\varepsilon_n \log|\varepsilon_n| = o(\varepsilon_n) \quad (F)$

2. Calcolare i seguenti limiti

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\{\sqrt{n+1} - n\right\}$

   (b) (30.1.2007) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\{\dfrac{\sinh n}{n2^n}(1-\cos\left(\dfrac{n\pi}{15}\right))\right\}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{e} + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

   (d) (*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

26.11.2007

Sviluppi notevoli

Sia ε_k =o(1) per $k \to +\infty$. Valgono allora i seguenti sviluppi notevoli:

- $\log(1+\varepsilon_k) = \varepsilon_k - \dfrac{1}{2}\varepsilon_k^2 + \dfrac{1}{3}\varepsilon_k^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\varepsilon_k^n + o(\varepsilon_k^n)$

- $e_k^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon_k + \dfrac{1}{2!}\varepsilon_k^2 + \dfrac{1}{3!}\varepsilon_k^3 + \ldots + \dfrac{1}{n!}\varepsilon_k^n + o(\varepsilon_k^n)$

- $\sin\varepsilon_k = \varepsilon_k - \dfrac{1}{3!}\varepsilon_k^3 + \dfrac{1}{5!}\varepsilon_k^5 \ldots + (-1)^n\dfrac{\varepsilon_k^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(\varepsilon_k^{2n+1})$

- $\cos\varepsilon_k = 1 - \dfrac{1}{2!}\varepsilon_k^2 + \dfrac{1}{4!}\varepsilon_k^4 + \ldots + (-1)^n\dfrac{\varepsilon_k^{2n}}{(2n)!} + o(\varepsilon_k^{2n})$

- $\sinh\varepsilon_k = \varepsilon_k + \dfrac{1}{3!}\varepsilon_k^3 + \dfrac{1}{5!}\varepsilon_k^5 \ldots + \dfrac{\varepsilon_k^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(\varepsilon_k^{2n+1})$

- $\cosh\varepsilon_k = 1 + \dfrac{1}{2!}\varepsilon_k^2 + \dfrac{1}{4!}\varepsilon_k^4 + \ldots + \dfrac{\varepsilon_k^{2n}}{(2n)!} + o(\varepsilon_k^{2n})$

- $\arctan\varepsilon_k = \varepsilon_k - \dfrac{1}{3}\varepsilon_k^3 + \dfrac{1}{5}\varepsilon_k^5 \ldots + (-1)^n\dfrac{\varepsilon_k^{2n+1}}{(2n+1)} + o(\varepsilon_k^{2n+1})$

- $\dfrac{1}{1-\varepsilon_k} = 1 + \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k^3 + \ldots + \varepsilon_k^n + o(\varepsilon_k^n)$

- $(1+\varepsilon_k)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}\varepsilon_k + \binom{\alpha}{2}\varepsilon_k^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}\varepsilon_k^n + o(\varepsilon_k^n)$

  dove $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

Limiti svolti con sviluppi di ordine superiore al I

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1-\cos\frac{1}{n}} - 2n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n - e^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\right)$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(\cos\dfrac{1}{n} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{e} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4\left(\cos^2\left(\dfrac{2}{n}\right) + 4\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2/n}-1} - \dfrac{1}{2\sin^2(1/\sqrt{n})}\right)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \left\{\cos\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) - 1 + \dfrac{1}{2n^2}\right\}$

28.11.2007 *Ora facoltativa*

Correzione I compitino.

03.12.2007

1. (LIMITI DI FUNZIONI CON SVILUPPI AL I ORDINE)
   Calcolare i seguenti limiti

   (a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$; $\lim_{x\to 0^+} x^x$; $\qquad \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$; $\qquad \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}}$

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$; $\qquad \lim_{x\to \pi} \frac{(\sin x)^2}{\cos x + 1}$

   (c) $\lim_{x\to e} \frac{1-\ln x}{x-e}$

   (d) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}$

   (e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x\ln x}$; $\qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x\ln x}$

   (f) $\lim_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+2} - \sin\sqrt{x})$

   (g) $\lim_{x\to \pi/2} (1+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$

   (h) $\lim_{x\to 1^-} (2-2^x)^{\sin(\pi x)}$

2. (LIMITI DI FUNZIONI CON SVILUPPI DI ORDINE SUPERIORE AL I)
   Calcolare i seguenti limiti

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^3(e^x-\cos x)}$

   (b) *(aprile 2004)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{[\log\sin x - \log x]^2}{x^{10/3}(1-\cos\sqrt{x})}$

Definizione di asintoto orizzontale, verticale, obliquo

$f(x)$ ha asintoto orizzontale a $+\infty$ (o a $-\infty$) di eq. $y = l$ se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l, \qquad \text{cioè se} \qquad f(x) = l + \mathrm{o}(1) \quad x \to +\infty$$

$f(x)$ ha asintoto verticale di eq. $x = x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty, \text{ e/o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

$f(x)$ ha asintoto obliquo a $+\infty$ (o a $-\infty$) di eq. $y = mx + q$ se

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \\ \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - mx\Big) = q \end{cases} \qquad \text{cioè se} \qquad f(x) = mx + q + \mathrm{o}(1) \quad x \to +\infty$$

3. Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - 1}$
   (b) *(febbraio 2004)* $f(x) = \sqrt{x^2 + \sin^2 x + x \arctan(e^x)}$

05.12.2007 *Ora facoltativa*

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \log x \log\left(1 + \dfrac{x^3}{3}\right)$
3. $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{3\sin^2 x + \sin x - 4}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
4. *(febbraio 2005)* $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^x + (1-x)e^2}{e - e^{\cos(x-2)}}$
5. $\lim_{n\to +\infty} n^\alpha \Big(n \sin(\dfrac{\pi n - 2}{2n^2}) - \arctan(n)\Big)$
6. Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali asintoti di

$$f(x) = x\frac{1 + |\log x|}{1 + \log x}$$

10.12.2007

1. Determinare se le seguenti funzioni ammettono asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)
   (a) $f(x) = (x^2 - x)\Big(2^{\frac{x+2}{x}} - 2\Big)$ (as. vert. e obliquo; II ordine)
   (b) $f(x) = x^{\frac{x+1}{x}}$ (non ha asintoti)
   (c) $(*)$ (Per casa)$f(x) = x\Big((2x + 2x^2)\log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) - 6xe^{\frac{1}{x}} - 3\Big)$ (as. vert., orizz.; III ordine)
2. Calcolare i seguenti limiti
   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)^2 + \ln(1 - x^2)}{x^3}$
   (b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\frac{\pi}{2} - \arctan x)\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x(\arctan(\frac{\pi}{x}))^3}$ (usare : $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn} x$)
   (c) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left(\sin^2 x + 2\log(\cos x)\right)$

3. Stabilire per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^b(e^x - \sqrt{1-2|x|}) & x < 0 \\ e^{\frac{a}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

è prolungabile con continuità su $\mathbb{R}$.

4. Classificare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$\frac{|x|}{x}; \quad \frac{[x]}{x}; \quad \sin\left(\frac{\pi x}{|x|}\right); \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad x\sin\left(\frac{1}{x^2+x}\right); \quad x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \text{ (per casa)}$$

5. Determinare il dominio e classificare i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \frac{\log(x^2) - 1}{\log(x^2) + 1}$$

Grafici locali di f(x) mediante sviluppo asintotico

Sia $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x_0) = 0$ (ci possiamo sempre ricondurre a questo caso, mediante traslazione) . Supponiamo di aver determinato la *parte principale* di $f(x)$ per $x \to x_0$ mediante una stima asintotica, cioè supponiamo di aver dimostrato che

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per} \quad x \to x_0$$

Allora il grafico di f ha le stesse caratteristiche qualitative del grafico di g *in un intorno di* x_0!!
In particolare:

(a) f e g hanno lo stesso segno in un intorno di x_0

(b) Se g ha retta tangente obliqua in x_0, anche f ha tangente obliqua (la stessa) in x_0

(c) Se g ha tangente orizzontale in x_0, anche f ha tangente orizzontale in x_0

(d) Se g ha tangente verticale in x_0, anche f ha tangente verticale in x_0

(e) Se g ha una cuspide in x_0, anche f ha una cuspide in x_0

(f) Se g ha un minimo o un massimo locale in x_0, anche f lo ha (conseguenza di (a)+(c))

(g) Se g ha un flesso a tangente orizzontale o verticale in x_0 (ATTENZIONE!, non un flesso a tangente obliqua!!), anche f lo ha (conseguenza di (a)+(c) o di (a)+(e))

SENZA ULTERIORI INFORMAZIONI, NON si può dire nulla sulla monotonia o sulla concavità di f!!
Basti pensare alla funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) : \\ f(x) &= x^2 + o(x^2) \ \ x \to 0, \text{ ma } f \text{ oscilla infinite volte per } x \to 0 \end{aligned}$$

Tuttavia, se $f(x)$ e $g(x)$ soddisfano ulteriori ipotesi di regolarità (ad esempio, $f(x) \in \mathcal{C}^2()U(x_0))$, allora si dimostrerà che dal grafico di g si possono dedurre anche informazioni sulla monotonia e sulla concavità di f!!

6. (Per casa) La funzione $f(x) = ax\cos x - \sin(ax) - ax\log(1+x^2) + ax^4$ ha in $x = 0$ un estremante relativo se e solo se $a \in$ ....

12.12.2007 *Ora facoltativa*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \left(\cos x - \sqrt{1-x^2}\right)$

2. Stabilire per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^a|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \\ |x|^b \arctan x & x \in (-1,0) \end{cases}$$

è continua in $(-1,1)$.

3. Data la funzione $f(x) = (x-|x|)^{\frac{x}{|x|}}$, classificare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x), \quad g_1(x) = 2xf(x), \quad g_2(x) = 2x^2 f(x)$$

4. Sia

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]^\alpha \log^2 x \qquad \alpha \in \mathbf{R}$$

Stabilire se esistono valori del parametro reale α per cui è possibile completare la definizione di f in modo che risulti continua in $[0,+\infty)$.

5. *(II compitino 2007)*
Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, t.c. $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 2007$. Dimostrare che $f(x)$ ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$.

17.12.2007

1. La disequazione $\log(\log(1+x+x^2)+1) \geq x$

   [A] è verificata nell'intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, per qualche $\varepsilon > 0$
   [B] è verificata nell'intervallo $(-\varepsilon, 0)$, per qualche $\varepsilon > 0$
   [C] è verificata nell'intervallo $(0, \varepsilon)$, per qualche $\varepsilon > 0$
   [D] nessuna delle precedenti risposte é esatta

2. *Derivate: regole di calcolo*

   Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni (dove esiste)

   $\tan x$; $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(2x+1)}$; $\quad x\sqrt{1+x^2} + \log(2x+1)$; xe^{x^2}

   $\arcsin\sqrt{1-x^2}$; $\quad x^x$;

3. *Rette tangenti*

   Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$, dove
   $$f(x) = (1 + x^2)^{\sin x}, \quad x_0 = 0$$

4. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile t.c. $g(\pi) = \frac{\pi}{2}$, e sia $f(x) = (\sin x) \cdot \sin(g(x))$. Calcolare la retta tangente a $f(x)$ in $x_0 = \pi$

5. *Punti angolosi, tangenti verticali, cuspidi*

   Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, dove esiste. Studiare i punti di non derivabilità, stabilendo di che tipo si tratta.

   (a) $|x^2 - 1|$; $\quad \log|\log x|$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} x^x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

6. *Derivata della funzione inversa*

   (a) (gennaio '07) la funzione $f(x) = 1 + \log[3 - (\sin \pi x)\sqrt{6x + 1}]$ soddisfa $f(\frac{1}{2}) = 1$ ed è strettamente monotona in un intorno V di $\frac{1}{2}$. Sia $g : f(V) \to V$ la funzione inversa di f. Determinare $g'(1)$.

   (b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e derivabile, la cui retta tangente in $x_0 = 1$ ha eq. $y = \sqrt{e}x + \sqrt{e}$. Detta $g(x) = f^{-1}(x)$ la sua funzione inversa, determinare l'eq. della retta tangente alla funzione
   $$h(x) = \log(g(x)) \quad \text{nel punto } x_0 = 2\sqrt{e}$$

7. *Derivabilità di funzioni definite a tratti*

   Studiare la derivabilità delle seguenti funzione
   $$f(x) = \begin{cases} x + b\sin x & x \leq 0 \\ e^{\frac{a}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

   Oss. (derivata come limite delle derivate)

   Sia $f : I(x_0) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ t.c.
   $$\begin{cases} f \text{ é continua in } x_0 \\ \\ \exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ finito o meno} \end{cases} \implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

   Lo stesso vale per le derivate destre e sinistre.

   Ma, attenzione! Puó succedere che
   $$\begin{cases} \nexists \lim_{x \to x_0} f'(x) \\ \textbf{ma} \\ \exists f'(x_0) \end{cases}$$

Esempio:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}\sin(1/x) & x\neq 0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$$

19.12.2007 *Ora facoltativa*

1. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una continua e derivabile, la cui retta tangente in $x_0=\frac{\pi}{2}$ ha eq. $y=3x-2\pi$. La funzione $f(x)$ é invertibile in un intorno del punto $x_0=\pi/2$? (Giustificare la risposta)
   In caso affermativo, detta $g(x)=f^{-1}(x)$ la sua funzione inversa, determinare l'eq. della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto di ascissa $f(\pi/2)$

2. (*settembre 2007*)
   La funzione $f:(\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\arctan(2\cos x)$ é continua e strettamente monotona. Sia $g:f(\pi,2\pi)\to(\pi,2\pi)$ la sua funzione inversa. Determinare $g'(-\pi/4)$

3. Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

   (a)
   $$f(x)=\begin{cases}\log(2x+1)\arctan(e^{1/x^2}) & -\frac{1}{2}<x<0\\ \\ (1+|x-2|)\sin(\pi x) & x\geq 0\end{cases}$$

   (b)
   $$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi|x|)-\pi|x|\cos(\pi|x|) & x\neq 0\\ \\ 0 & x=0\end{cases}$$

   (c)
   $$f(x)=\begin{cases}\frac{x\sinh x-\log(x^2+1)}{x\left(2\cosh\sqrt[3]{x^2}-e^{\sqrt[3]{x^4}}\right)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

   (d) Determinare per quali valori di α la seguente funzione è derivabile con continuità
   $$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin(\frac{1}{x}) & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

9.1.2008 *Ora facoltativa*

1. Studiare continuitá, derivabilitá e continuitá delle derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{|x|}\ , & \text{se } |x|\leq 1\\ |x|-2\ , & \text{se } 1<|x|\leq 2\end{cases}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \\ e^{\frac{1}{x}} + b & \text{se } x < 0 \\ \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x + \cos x - 2e^{x^4}}{|x|^\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

2. Sia
$$f(x) = e^{(x-2)^3}.$$
Dimostrare che la funzione $f(x)$ è invertibile; calcolare il dominio della funzione inversa f^{-1}. Calcolare $(f^{-1})'(e)$.

3. Determinare il massimo intervallo I, intorno dell'origine, in cui sia invertibile la funzione
$$f(x) = x^4 - 4x + 1.$$
Detta f^{-1} la funzione inversa su I, determinarne il dominio; calcolare $(f^{-1})'(6)$.

4. Data la successione $x_n = (2\sqrt{n} + 3)[\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-1}]$, calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{\sqrt{n}}$$

5. Determinare dominio e asintoti della seguente funzione
$$f(x) = (x+2)\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

14.1.2008

Studio di funzione

- dominio, eventuali simmetrie
- segno ed intersezioni con gli assi (se possibile)
- limiti alla frontiera, eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)
- studio monotonia (segno f'), ricerca estremanti
- eventuali punti di non derivabilitá
- studio concavitá (segno f'') e eventuali punti di flesso (se non troppo difficile!!)

Oss. Questo e' uno schema di massima: non sempre e' necessario svolgere tutti i punti indicati, ed é anche possibile ricavare informazioni dallo sviluppo asintotico della funzione a ∞ o nell'intorno di punti particolari...!

1. Studiare l'andamento delle seguente funzione e tracciarne un diagramma qualitativo (insieme di definizione, limiti di f e f' alla frontiera di tale insieme, eventuali asintoti, crescere e decrescere, eventuali estremanti)
   $f(x) = |x| \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$

2. Determinare $\sup, \inf, \max, \min$ del seguente insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad e^{\frac{2}{x-4}} \leq \frac{10\sqrt[3]{e}}{x}, \quad x \neq 0, 4 \right\}$$

3. Determinare il massimo insieme $I \subset \mathbb{R}^+$ t.c. $\forall\ a \in I$ l'equazione

$$e^{\frac{2}{x-4}} = \frac{a}{x},$$

   ammette almeno due soluzione.

4. Determinare $\sup, \inf, \max \min$ del seguente insieme

$$E = \left\{ \sqrt{\frac{2n^2 + (-)^{n+1} 4}{n}}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

5. L'equazione

$$-\log\left(\frac{3x+4}{2x}\right) = x + a$$

   ammette almeno 2 soluzioni se e solo se $a \in$ ....

16.1.2008 *Ora facoltativa*

1. Determinare il numero di elementi dell'insieme

$$A = \left\{ x \in [0,1] : (3x^2 - 2) \sinh x - 6x \cosh x + 1 = 0 \right\}$$

2. Scrivere la formula di MacLaurin arrestata al III ordine di
   $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + 2x}$

3. Sia $g(x)$ una funzione derivabile 3 volte in $x = 0$, tale che $g(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ per $x \to 0$. Scrivere la formula di MacLaurin arrestata al III ordine di

$$f(x) = \frac{g(x)}{2x + 1}$$

4. Determinare la 20-esima derivata in 0 della funzione $f(x) = \mathrm{Ch}(x^3) \log(1 + x^4)$

17.1.2008

1. Scrivere il polinomio di Mc Laurin di grado massimo per la funzione
$$f(x) = 1 + x + \sin(x^{4/3})$$
Oss. La funzione é derivabile solo 1 volta in 0, quindi il polinomio di Mc Laurin di grado massimo é
$$P(x) = 1 + x$$
É anche vero che
$$f(x) = 1 + x + x^{4/3} - \frac{1}{6}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
Questo, tuttavia, NON é il polinomio di Mc Laurin!

2. (Precauzioni d'uso a de l'Hopital)
   (a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$: NON é una forma di indeterminazione!
   (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})}$: $\quad \nexists \quad \lim f'/g'$ ma $\quad \exists \quad \lim f/g$
   (c) si applica solo a quozienti, NON a prodotti o somme!
$$\lim_{x\to 0^+} x\log x; \qquad \lim_{x\to +\infty} (x - \log x)$$
Esercizi tratti dai temi d'esame:

3. 11 luglio 2006 n. 2; n. 7;

4. II compitino - 13 gennaio 2006 n. 6

5. 7 luglio 2005 n. 7