[anno accademico 2008-2009]

Geometria I

Proff. Marino Palleschi e Cristina Turrini

Il corso intende fornire le basi della geometria analitica elementare per lo studio degli enti lineari nel piano e nello spazio e introdurre gradualmente ai concetti dell'algebra lineare necessari per lo studio dei sistemi di equazioni lineari e per la loro trattazione col formalismo delle matrici e delle applicazioni lineari.
Il programma sottoindicato non riflette l'ordine cronologico della trattazione nel corso.

1. Geometria analitica elementare

Sistemi di coordinate. Cambiamenti di coordinate e trasformazioni. Rappresentazioni analitiche degli enti lineari nel piano e nello spazio. Elementi impropri e coordinate omogenee. Proprietà elementari delle coniche. Gruppi di trasformazioni del piano e dello spazio. Concetto di geometria secondo F. Klein.

2. Spazi vettoriali e teoria della base

Vettori dello spazio ordinario e operazioni principali. Terne e n-uple su un campo: loro struttura. Nozione di spazio vettoriale. Sottospazi. Dipendenza lineare. Basi. Teorema di esistenza. Dimensione. Proprietà fondamentali delle basi.

3. Applicazioni lineari e matrici

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali; comportamento in relazione a generatori e a sistemi indipendenti. Nuclei e immagini. Isomorfismi. Endomorfismi e automorfismi. Lo spazio delle applicazioni lineari tra due spazi vettoriali. L’algebra degli endomorfismi. Matrici su un campo; operazioni e loro proprietà. L’algebra delle matrici quadrate. Matrice rappresentativa di un'applicazione lineare e teorema di rappresentazione. Il gruppo degli automorfismi.

4. Determinanti e sistemi di equazioni lineari

Determinanti e loro proprietà. Teorema di Laplace. Caratterizzazione delle matrici invertibili. Il gruppo lineare generale. Sistemi di equazioni lineari nel formalismo matriciale. Teorema di Cramer. Caratteristica di una matrice, suo significato e suo calcolo. Teorema di Rouche'-Capelli. Risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Metodo di Gauss.

Nelle lezioni di approfondimento del **corso avanzato** (1 credito aggiuntivo) sarà inoltre sviluppato il seguente argomento: “**Fasci di coniche e applicazioni**”.

L’esame di Geometria I (a.a. 2008-09) consiste in una prova scritta e una prova orale. Quest'ultima verterà sui seguenti argomenti

A1. Retta affine, rapporto semplice, affinità, congruenze. Retta proiettiva, birapporto, proiettività.
A2. Elementi di geometria del piano e dello spazio: aspetti di tipo affine (rappresentazioni analitiche di rette e piani, intersezioni, condizioni di parallelismo). Affinità del piano in sé.
A3. Elementi di geometria del piano e dello spazio: aspetti di tipo euclideo-metrico (angoli e distanze, condizioni di ortogonalità). Congruenze e similitudini del piano in sé.

B1. Piano affine ampliato, piano proiettivo e proiettività.
B2. Il concetto di Geometria secondo Klein. Invarianti metrici, simili, affini e proiettivi.
B3. Generalità sulle coniche: irriducibilità, punti singolari e punti semplici, retta tangente.

C1. Sistemi di equazioni lineari. Risoluzione con il metodo di Gauss. Determinante di una matrice e sue proprietà (senza dimostrazione). Teoremi di Laplace (senza dimostrazione). Matrice inversa. Teorema di Cramer. Il teorema di Rouché-Capelli.
C2. Spazi vettoriali, sottospazi. Sistemi di generatori. Dipendenza e indipendenza lineare. Somma e somma diretta di sottospazi, formula di Grassmann.
C3. Teoria della base per spazi vettoriali finitamente generati: teorema di esistenza di una base, teorema di completamento a una base; equicardinalità delle basi.

D1. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali, nucleo e immagine, caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive o suriettive. Esistenza e unicità di applicazioni lineari assegnate su una base del dominio finitamente generato. Teorema della nullità + rango.
D2. Caratteristica di una matrice. Teorema di Kronecker e sue applicazioni: teorema di Rouché-Capelli; matrici rappresentative di un’applicazione lineare fra spazi vettoriali finitamente generati e significato della loro caratteristica.
D3. Gli spazi vettoriali Hom (V, W), End (V). Rappresentazione delle applicazioni lineari tra spazi finitamente generati tramite matrici: coordinate del vettore f(**v**) immagine di v per l’applicazione lineare f in funzione delle coordinate di **v**, matrice rappresentativa dell’applicazione lineare composta di due applicazioni lineari.

E’ richiesta la conoscenza di definizioni, esempi, enunciati di tutta la teoria sopra richiamata. Per quanto riguarda le dimostrazioni, scegliere, per ciascuna delle quattro parti A, B, C, D, quelle relative a una delle tre sezioni in cui è divisa.