Didattica della Matematica per il triennio

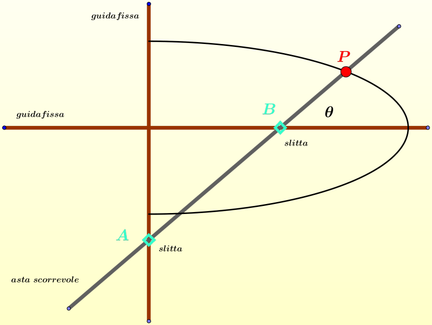
Geometria sintetica e geometria analitica

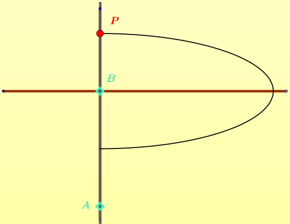
anno acc. 2012/2013

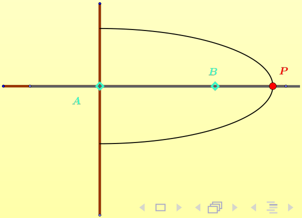
Univ. degli Studi di Milano

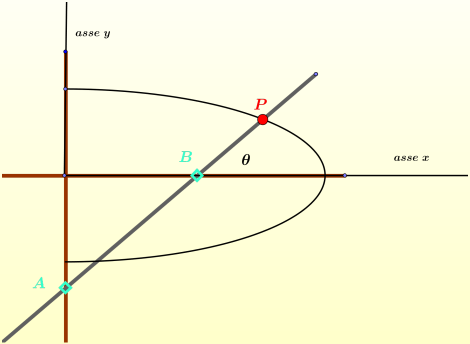
index

Il compasso di Archimede





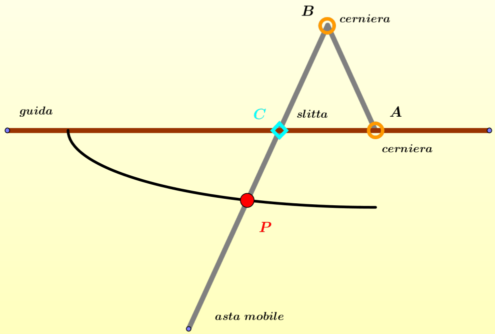




$$\overline{PA} = a, \ \overline{PB} = b \qquad P \equiv (a\, cos(\theta), b\, sin(\theta))$$

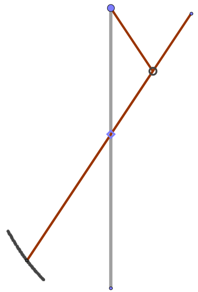
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'ellissografo di Van Schooten



P descrive un'ellisse di semiassi $a = r + s$ e $b = s - r$, con $r = \overline{AB}$, $s = \overline{BP}$.

È il movimento di una porta basculante



Analisi del problema:
traduzione in termini matemetici,
quali strumenti usare?,
geometria analitica (applicata ad una problema reale)
...

Costruzione di una macchina virtuale (es con Geogebra)

Costruzione del meccanismo

Condizioni perchè il meccanismo funzioni ...

Differenze tra movimento reale e movimento virtuale.

index

Metodi per rappresentare analiticamente una curva nel piano.

- Grafici di funzioni reali di variabile reale
  $y = f(x),\ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$
- Luoghi di zeri di funzioni di due variabili (ad esempio polinomi: curve algebriche)
  $F(x, y) = 0,\ F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$
- Curve in forma parametrica
  $x = a(t), y = b(t),\ a, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$
- Rappresentazioni cartesiane o parametriche in coordinate polari ρ, θ.

Curve piane in forma parametrica $x = a(t), y = b(t)$.

Ipotesi:
1) a, b di classe $\mathcal{C}^2$ (non è strettamente necessaria)
2) almeno genericamente, se $t_1 \neq t_2$ allora $(a(t_1), b(t_1)) \neq (a(t_2), b(t_2))$ (questa è necessaria!)

Poniamo $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ (è bene tenere distinti il punto P di coordinate $(a(t), b(t))$ da $\mathbf{P}(t)$).

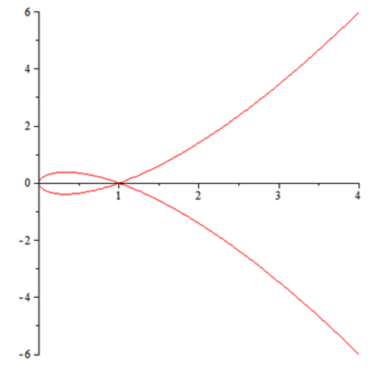
Se, per $t_1 \neq t_2$, si ha $\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}(t_2)$, il punto $P \equiv \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}(t_2)$ viene detto *multiplo*.

Se, per $t = t_0$, si ha $\mathbf{P}'(t_0) = (a'(t_0), b'(0)) \neq (0, 0)$, si dice che $\mathbf{P}$ è *regolare* in t_0 (N.B. è una proprietà di $\mathbf{P}$, non di $P \equiv (a(t_0), b(t_0))$.

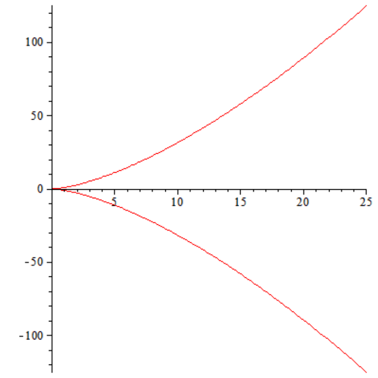
Un punto $P \equiv (a(t_0), b(t_0))$ viene detto *semplice* se non è multiplo e $\mathbf{P}$ è *regolare* in t_0.

ESEMPI

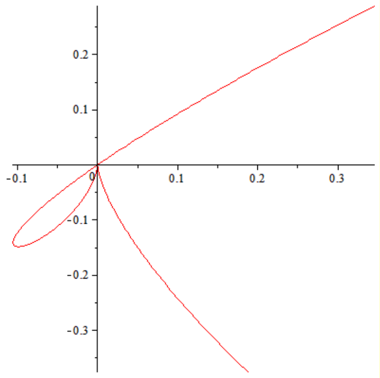
1) $\mathbf{P}(t) = (t^2, t(t^2 - 1))$.
$\mathbf{P}(-1) = \mathbf{P}(1) = (1, 0)$.
$P \equiv (1, 0)$ è multiplo.
$\mathbf{P}(-1)$ e $\mathbf{P}(1)$ sono regolari.



2) $\mathbf{P}(t) = (t^2, t^3)$.
$\mathbf{P}(0) = (0, 0)$.
$P \equiv (0, 0)$ non è multiplo.
$\mathbf{P}(0)$ non è regolare.

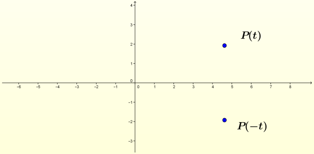


3) $\mathbf{P}(t) = (t^3(t-1), t^2(t-1))$.
$\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(1) = (0,0)$.
$P \equiv (0,0)$ è multiplo.
$\mathbf{P}(0)$ non è regolare; $\mathbf{P}(1)$ è regolare.

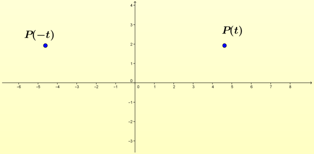


Simmetrie del grafico

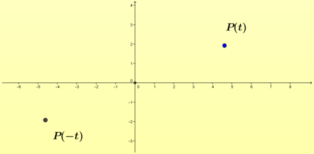
Se $a(t)$ è pari, e $b(t)$ è dispari, allora il grafico di $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ è simmetrico rispetto all'asse x.



Se $a(t)$ è dispari, e $b(t)$ è pari, allora il grafico di $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ è simmetrico rispetto all'asse y.



Se $a(t)$ e $b(t)$ sono entrambe dispari, allora il grafico di $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ è simmetrico rispetto all'origine.



Retta tangente

Se $P \equiv (a(t_0, b(t_0))$ è semplice, la retta tangente al grafico di $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ ha espressione parametrica

$$x = a(t_0) + \lambda a'(t_0),\ y = b(t_0) + \lambda b'(t_0),$$

ovvero equazione cartesiana

$$b'(t_0)(x - a(t_0)) = a'(t_0)(y - b(t_0)).$$

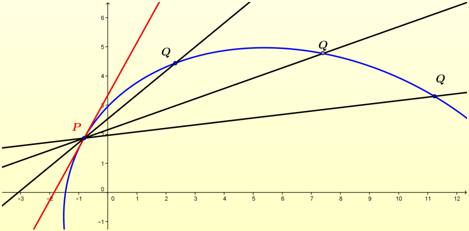
Se $\mathbf{P}$ è regolare in t_0 (anche se $P \equiv (a(t_0, b(t_0))$ non è semplice), la retta tangente al ramo del grafico di $\mathbf{P}$ corrispondente a un intorno di t_0 ha equazione

$$b'(t_0)(x - a(t_0)) = a'(t_0)(y - b(t_0)).$$

index

Retta tangente alla curva Γ nel punto $P \in \Gamma$.

Significato geometrico: retta limite (se esiste) di rette secanti del tipo PQ, al tendere di Q a P



Traduzione "algebrica" (nel caso delle coniche, o più in generale per curve algebriche): retta che ha *molteplicità di intersezione* (maggiore o) uguale a 2 con la curva nel punto.

Varie rappresentazioni analitiche per la *retta tangente*

A Nel caso di grafico di funzione (derivabile) $y = f(x)$,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

B Nel caso di un'equazione cartesiana $F(x,y) = 0$, con F differenziabile, $F(x_0,y_0) = (0,0)$ e $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})_{|(x_0,y_0)} \neq (0,0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}_{|(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}_{|(x_0,y_0)}(y - y_0) = 0$$

C Nel caso di un ramo di una curva parametrica $\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t))$ con $\mathbf{P}$ regolare in t_0,

$$b'(t_0)(x - a(t_0)) = a'(t_0)(y - b(t_0)).$$

Il legame tra la rappresentazione della retta tangente nel caso A e nel caso B è dato dal teorema del Dini.
Se $\frac{\partial F}{\partial y})_{|(x_0,y_0)} \neq 0$, la derivata in x_0 della funzione $y = y(x)$ (definita implicitamente) è

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Il legame tra la rappresentazione della retta tangente nel caso B e nel caso C si ricava osservando che se $(x(t), y(t))$ è una parametrizzazione di $F(x,y) = 0$, differenziando $F(x(t), y(t)) \equiv 0$, si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t) \equiv 0.$$

Si noti che, nel caso C, l'esistenza (o meno) della retta tangente in $\mathbf{P}(t_0)$ è una propietà della parametrizzazione, non del luogo descritto.

Può accadere che una curva di equazione $F(x,y)=0$ abbia in (x_0,y_0) un punto semplice, dotato di retta tangente, ma una parametrizzazione $(x(t),y(t))$ di tale curva non abbia retta tangente in $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$.

Ad esempio, la retta di equazione $y-x=0$ è parametrizzata da $\mathbf{P}(t)=(t^3,t^3)$ e $\mathbf{P}(0)$ non è regolare.

Legame tra l'interpretazione algebrica e geometrica di retta tangente in $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, nel caso di una curva algebrica $F(x, y) = 0$.

Per semplicità assumiamo $P_0 = (0, 0)$.

$$F(x, y) = \alpha x + \beta y + \phi_2(x, y) + \phi_3(x, y) + \ldots$$

con ϕ_h polinomio di grado h.
Risulta $\frac{\partial F}{\partial x}_{|P_0} = \alpha$, $\frac{\partial F}{\partial y}_{|P_0} = \beta$.
Assumiamo anche P_0 semplice e $\beta \neq 0$. Intersecando la generica retta $y = mx$ per P_0 con la curva si ottiene

$$F(x, mx) = x(\alpha + \beta m) + x^2 \phi_2(1, m) + x^3 \phi_3(1, m) + \ldots$$

da cui si ricava che la retta che ha molteplicità di intersezione magggiore o uguale a 2 è quella per cui $m = -\frac{\alpha}{\beta}$, ovvero di equazione $\alpha x + \beta y = 0$.

index

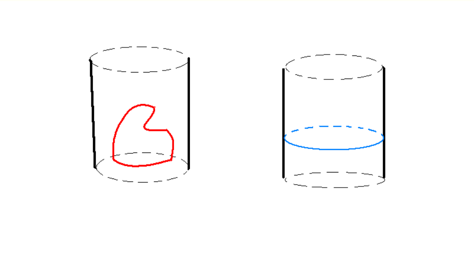
Dal punto di vista intrinseco le curve in topologia sono poco significative: uno spazio topologico localmente euclideo di dimensione uno, di Hausdorff e connesso è omeomorfo o a S^1 (*curva chiusa semplice*) o a $\mathbf{R}$ (*curva aperta semplice*).

Dal punto di vista estrinseco invece danno luogo a concetti fondamentali quali "dentro / fuori" (curve nel piano) e "sciolto / annodato" (curve nello spazio).

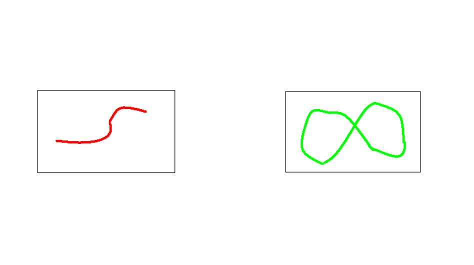
TEOREMA (della *curva di Jordan*)
Una curva chiusa semplice (ovvero immagine omeomorfa di S^1) $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ divide il piano in due componenti connesse C_1 e C_2 ($\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma = C_1 \sqcup C_2$). Una tra C_1 e C_2 è limitata e l'altra no; entrambe hanno Γ come frontiera.

La componente limitata viene detta *interno* di Γ, l'altra *esterno*.

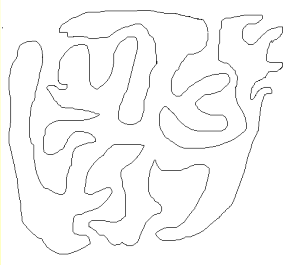
Non sempre una curva chiusa semplice sconnette una superficie.



Le ipotesi Γ "chiusa" e "semplice" sono necessarie.



Quali punti sono interni e quali esterni?



Punti di tipo *pari* (interni) e di tipo *dispari* (esterni).