

D

In \mathbb{R}^3 sono dati i sottoinsiemi

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a = 2b, c = a+b \right\}, \quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a^2 = b^2 \right\}, \quad Z = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid b+2c = 0 \right\}.$$

Per ciascuno dei tre sottoinsiemi sopra indicati, stabilire se è un sottospazio e, in caso affermativo, determinarne la dimensione e una base.

MATEMATICA del DISCRETO
(Informatica)
Febbraio 2017

Cognome.....Nome.....Matricola.....

A

Siano $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ l'insieme dei numeri razionali non nulli e $\star : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q}^*$ l'operazione definita da

$$m \star n = \frac{mn}{3}, \quad m, n \in \mathbb{Q}^*.$$

- a) Stabilire se \star è associativa.
- b) Stabilire se \star ammette elemento neutro, e, in caso affermativo, determinarlo.
- c) Stabilire se (\mathbb{Q}^*, \star) è un gruppo.

B

Siano \mathbb{K} un campo e sia $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 \in \mathbb{K}[x]$.

- a) Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ provare che $(x - 2)^2$ divide $p(x)$.
- b) Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ determinare tutte le radici di $p(x)$.
- c) Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ determinare tutte le radici di $p(x)$.

C

È dato il sistema di equazioni lineari

$$(S) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \\ 3y + z = k \end{cases}$$

- a) Al variare del parametro reale k stabilire se il sistema S è determinato, indeterminato, o impossibile.
- b) Nel caso $k = -1$, risolvere il sistema.