MATEMATICA del DISCRETO
Prima prova intermedia 2018/2019, primo turno

Cognome...................................Nome........................Matricola.............

TUTTI I RISULTATI VANNO BREVEMENTE GIUSTIFICATI

A1
Nel gruppo $(S_7, \circ)$ delle permutazioni su 7 elementi, si consideri la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

e il ciclo $\gamma = (153)$.

1) Scrivere α come prodotto di cicli disgiunti.
2) Determinare il periodo di α.
3) Stabilire se sia vero o falso che $\alpha^{-47}(2) = \gamma(2)$.
4) Stabilire se sia vero o falso che α^4 appartiene al sottogruppo ciclico generato γ.

B1

Si considerino i seguenti insiemi:

- $A = \{1, 2, 3\}$ con la relazione R_A così definita
  per ogni coppia di elementi x e y in A si ha xR_Ay se e solo se $x|y$, (il simbolo $x|y$ significa che x divide y).
- $B = \{1, 2, 3\}$ con la relazione R_B così definita
  per ogni coppia di elementi x e y in B si ha xR_By se e solo se $x \le y$,
- $X = A \times B$ con la relazione : $(a, b)R_X(c, d)$ se e solo se aR_Ac e bR_Bd.

(1) Scrivere la matrice di incidenza di R_B.
(2) Dimostrare che R_X una relazione d'ordine su X, e stabilire se parziale o totale.
(3) Disegnare il diagramma di Hasse di R_X
(4) Stabilire se il sottoinsieme Y di X costituito dalle coppie $(1, 1), (1, 3), (2, 3)$ ammette estremo inferiore, estremo superiore, minimo o massimo ed in caso affermativo determinarli.

C1

Nell'insieme $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ delle coppie di numeri razionali (a, b) con $b \neq 0$, si consideri l'operazione associativa $\star$ così definita:

$$(a, b) \star (c, d) = (a + c - 1, \frac{bd}{4}).$$

1) Dimostrare che $(X, \star)$ è un gruppo abeliano (non è richiesta la verifica dell'associatività).
2) Determinare il periodo di $(1, -4)$.
3) Calcolare $(2, 3) \star ((3, 4)^{-1})$.
4) Sia $f : X \to \mathbb{Q}^*$ l'applicazione definita da $f((a, b)) = b$. Stabilire se f è un omomorfismo dal gruppo $(X, \star)$ al gruppo $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.