

C1

- i) Si dia la definizione di anello.
- ii) Si consideri l'anello $Mat(2)$ delle matrici quadrate reali di ordine 2 rispetto all'usuale somma e prodotto righe per colonne. Qual è l'elemento neutro rispetto al prodotto in tale anello?
- iii) L'anello $Mat(2)$ è un campo?

C2

- i) Si dia la definizione di relazione d'ordine \preceq in un insieme X .
- ii) Quando un elemento $x \in X$ viene detto massimo per (X, \preceq) ?
- iii) Sia $X = \{a, b, c, d\}$. Si costruisca una relazione d'ordine \preceq in X in cui a sia massimo e in cui NON esista un minimo.

C3

- i) Si dia la definizione di massimo comun divisore di due interi $a, b \in \mathbb{Z} \setminus 0$.
- ii) Il massimo comun divisore di due interi è unico?
- iii) Si utilizzi il metodo delle divisioni successive per determinare $MCD(56, 72)$.

C4

i) Si dia la definizione di operazione in un insieme. Quando si dice che un'operazione è commutativa?

ii) Si dia un esempio di operazione commutativa e uno di operazione NON commutativa nell'insieme delle matrici reali quadrate di ordine 2.

iii) Se A e B sono matrici reali quadrate di ordine 2, è vero o falso che, rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne, si ha

$$(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2?$$

C5

i) Si dia la definizione di gruppo.

ii) Si dia un esempio di operazione interna rispetto alla quale l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x è un gruppo ed un esempio di operazione rispetto alla quale NON lo è.

iii) In un gruppo (G, \cdot) , è vero o falso che dati comunque due elementi $a, b \in G$ si ha sempre

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1},$$

ove $(x)^{-1}$ denota l'inverso di x ?

C6

i) Sia $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ un polinomio a coefficienti nel campo reale. Che cosa vuol dire che $\alpha \in \mathbf{R}$ è una radice di p ?

ii) Se α è una radice di un polinomio $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ di grado ≥ 2 , che cosa possiamo dire relativamente alla riducibilità di $p(x)$?

iii) È vero o falso che tutti i polinomi a coefficienti complessi $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ di grado ≥ 2 sono riducibili?

D1

- i) Si dia la definizione di nucleo di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali.
- ii) Nel caso di applicazioni lineari, come si caratterizzano le applicazioni iniettive?
- iii) Si dia un esempio di applicazione lineare NON iniettiva da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 .

D2

- i) Si dia la definizione di insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale.
- ii) Dare un esempio, se esiste, di insieme di 3 vettori di \mathbb{R}^3 che NON siano linearmente indipendenti.
- iii) Dare un esempio, se esiste, di insieme di 4 vettori di \mathbb{R}^3 che siano linearmente indipendenti.

D3

- i) Si dia la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.
- ii) Dato uno spazio vettoriale V di dimensione 3 e una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$, come si può costruire un isomorfismo tra V e \mathbf{R}^3 ?
- iii) Siano $W = Mat(2)$ lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine 2 e $Z = \mathbf{R}_d[x]$ lo spazio dei polinomi reali nell'indeterminata x di grado minore o uguale a d . Per quale d gli spazi W e Z sono isomorfi?

D4

- i) Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali
- ii) Si dia un esempio di applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ed un esempio di applicazione $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che NON sia lineare.
- iii) È vero o falso che, se $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è tale che $h(\underline{0}) = \underline{0}$, allora h è lineare?

D5

- i) Quando un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V viene detto sottospazio?
- ii) Dare un esempio di sottoinsieme S di \mathbb{R}^3 che sia un sottospazio e un esempio di sottoinsieme T di \mathbb{R}^3 che NON sia un sottospazio.
- iii) Quale relazione sussiste tra la dimensione n di uno spazio vettoriale V e la dimensione k di un suo sottospazio U ?

D6

- i) Sia A una matrice reale $m \times n$. Si dia la definizione di caratteristica (o rango) di A .
- ii) Quali altri significati ha la caratteristica di una matrice?
- iii) Dare un esempio di matrice 4×5 con caratteristica 3.