

Argomento 1 - Esercizi

Avvertenza: alcuni esercizi, denotati con *, possono presentare qualche difficoltà per i principianti.

ESERCIZIO 1.1 Eseguire il seguente prodotto di numeri reali: $(\sqrt{7} - 3\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.2 Confrontare i numeri reali $a = \frac{1 + \sqrt{26}}{2}$ e $b = \frac{2 + \sqrt{17}}{2}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.3 Mettere in ordine crescente i seguenti numeri reali:

1.001, $1.414\bar{1}$, $-\pi$, 0.9541, $-3.34\bar{6}$, 0.998, $\sqrt{2}$, 0.954, -3.1416 , -3.347 .

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.4 Descrivere i seguenti insiemi come intervalli o unione di intervalli:

$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 \leq x < 0 \text{ oppure } 2 < x < 4\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{7}{4} \leq x < 1 \text{ oppure } x > 3\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \leq -1 \text{ oppure } 2 \leq x < \frac{8}{3}\}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.5 Dire quali degli insiemi A , B , C , D dell'esercizio 1.4 sono

- a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
- b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
- c) limitati
- d) dotati di massimo
- e) dotati di minimo.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.6 Descrivere con la simbologia degli insiemi (come nell'esercizio 1.4) i seguenti insiemi:

$A = (-\frac{4}{3}, 1] \cup (2, +\infty)$; $B = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, 5]$; $C = \{0\} \cup (4, 5]$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.7 Dire quali degli insiemi A, B, C dell'esercizio 1.6 sono

- a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
- b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
- c) limitati
- d) dotati di massimo
- e) dotati di minimo.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.8** Per ognuno dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{n} - n : n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad C = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

elencare gli elementi che si ottengono ponendo $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Dire poi quali dei tre insiemi sono

- a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
- b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
- c) limitati
- d) dotati di massimo
- e) dotati di minimo.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.9** Per ognuno dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad B = \left\{ \frac{-2-n}{n+1} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}, \quad C = \left\{ n + \frac{3}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

dire se sono

- a) superiormente limitati (qual è l'estremo superiore?)
- b) inferiormente limitati (qual è l'estremo inferiore?)
- c) dotati di massimo
- d) dotati di minimo.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.10** Si consideri l'insieme $A = \{2^{2-n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Tra

$$-\infty, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 2, \quad 4, \quad +\infty$$

qual è $\sup A$ e quale $\inf A$?

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.11 Calcolare i valori della funzione

$$f(x) = x^4 - 4x + 1$$

in

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 2$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.12 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

Quali dei seguenti punti appartengono al grafico di f ?

a) $(-1, 3)$

b) $(-2, -11)$

c) $(0, -1)$

d) $(1, 3)$.

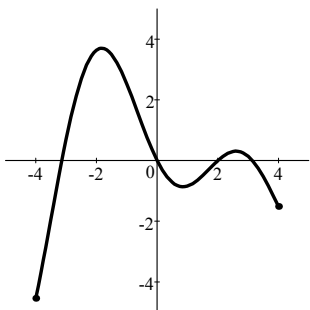
Argomento

Soluzione

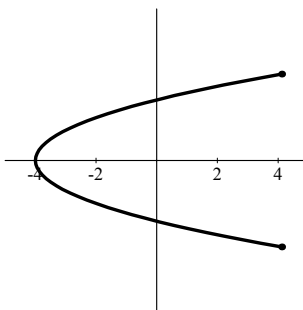
ESERCIZIO 1.13 Quali dei seguenti disegni possono rappresentare il grafico di una funzione

$$f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}?$$

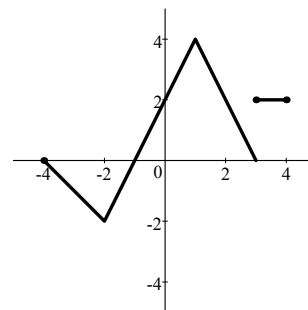
(Nota bene: il punto in evidenza che delimita alcune curve indica, qui e negli esercizi successivi, che si deve pensare quel punto appartenente al disegno; invece il punto non appartiene al disegno se non è in evidenza).



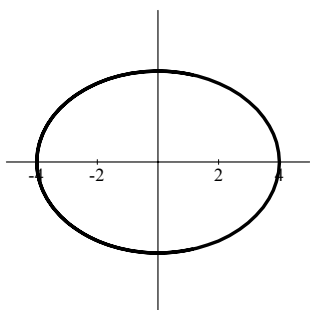
(A)



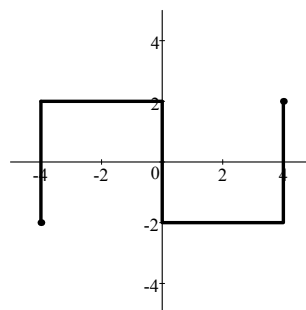
(B)



(C)



(D)



(E)

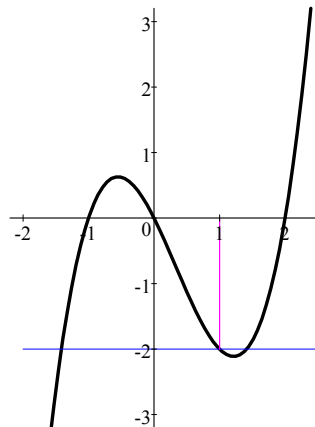
Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.14 In figura è tracciato in grassetto il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dire:

- a) quanto vale $f(1)$
- b) in quanti altri punti dell'intervallo $[-2, 2]$ dell'asse x la funzione assume il valore $f(1)$.



Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.15 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = 3x^2 - 4x.$$

Dire se esistono - e in caso affermativo quali sono - gli elementi del dominio \mathbb{R} di f tali che

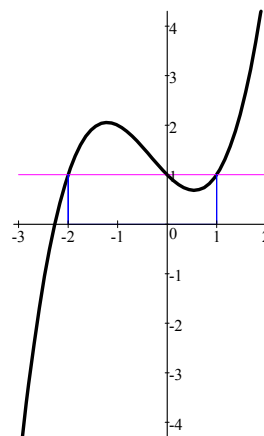
- a) $f(x) = -1$
- b) $f(x) = -\frac{4}{3}$
- c) $f(x) = -2$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.16 Sia $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è disegnato in grassetto in figura.

- a) Quali sono gli elementi del dominio in corrispondenza ai quali $f(x) = 1$?
- b) Ci sono elementi positivi del dominio in corrispondenza ai quali $f(x) = 0$?



Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.17 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{2x + 3}.$$

Per ciascuno dei seguenti numeri reali dire se è un valore di f e, in caso affermativo, quante volte viene assunto:

- a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $-\frac{8}{9}$ d) 0 e) $\frac{5}{3}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.18 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Per ciascuno dei seguenti numeri reali dire se è un valore di f e, in caso affermativo, quante volte viene assunto:

- a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{9}{4}$ e) 3

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 1.19 Controllare se la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{3x+10}{4-x}}$ è definita in

- a) $x = -4$ b) $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = -\frac{10}{3}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.20 L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \frac{1}{|1-x|+1}$ è

A) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	B) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$	C) \mathbb{R}	D) $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$
--	--	------------------------	--

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.21 Calcolare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

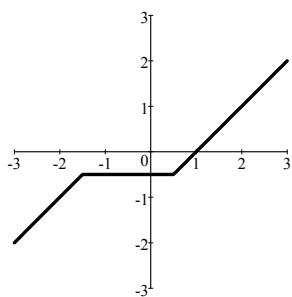
- a) $\frac{1}{|x| + 1}$ b) $\frac{1}{|x| - 1}$ c) $\sqrt{|x - 1|}$ d) $\frac{1}{\sqrt{|x - 1|}}$
 e) $\frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ f) $\frac{2x - 1}{x^2 + x + 2}$ g) $\frac{x - 1}{8 - x^3}$ h) $\frac{1 - 2x}{|x| - 1} + \frac{3}{x^2 - 4}$

Argomento

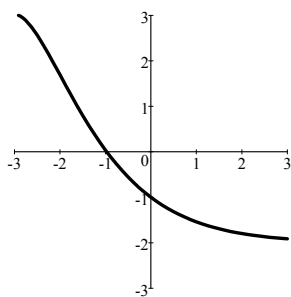
Suggerimento

Soluzione

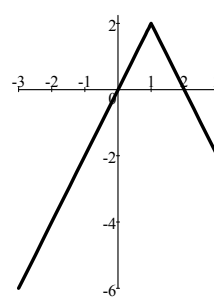
ESERCIZIO 1.22 Si considerino le funzioni $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ i cui grafici sono disegnati in figura. Quali di esse sono iniettive?



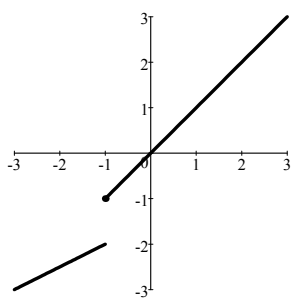
(a)



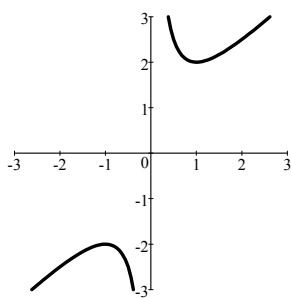
(b)



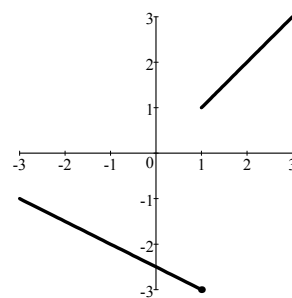
(c)



(d)



(e)



(f)

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.23** Quali delle seguenti funzioni sono iniettive?

- a) $2 - 3x$ b) $2 - |3x|$ c) $\frac{1}{2 - 3x}$
 d) $2x + |x|$ e) $x + |2x|$ f) \sqrt{x}

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 1.24 Siano $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Allora $(g \circ f)$ è la funzione

A) $x - 1$	B) $\sqrt{x^2 - 1}$	C) $ x - 1$	D) $\sqrt{x} - 1$
------------	---------------------	--------------	-------------------

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.25 Siano $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Allora $g \circ f$ è la funzione

A) $\pm \sqrt{x^2 + x + 1}$	B) $\sqrt{x^2 + x + 1}$	C) $\sqrt{x^2 + x + 1}$	D) $\sqrt{x^2 \pm x + 1}$
------------------------------------	--------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.26 Siano $f(x) = \frac{x-2}{2-x^3}$ e $g(x) = (x+1)^2$. Calcolare la funzione composta $g \circ f$ e il suo insieme di definizione.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.27 Siano $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^3}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ e i relativi insiemi di definizione.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.28 Siano $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ e i relativi insiemi di definizione.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.29 Sia $f(x) = 5$ e $g(x) = \frac{2}{|x|+1}$. Calcolare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$. Più in generale, se $f(x)$ è una funzione costante e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque altra funzione, come sono le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$?

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.30** Si considerino le funzioni $g(x) = 1-x^2$ e $f(x) = \begin{cases} x^5 - 2x^3 + x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

- a) Quanto vale $(g \circ f)(2)$?
- b) Quanto vale $(f \circ g)(2)$?
- c) Calcolare $(g \circ f)(x)$.
- d) Calcolare $(f \circ g)(x)$.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.31** Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - x - 1$. L'equazione $f(x) = f(3 - 2x)$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.32** Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - x - 1$. L'equazione $f(x) = f(1 - x) + 2$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento

Soluzione

***ESERCIZIO 1.33** Si consideri la funzione $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$. L'equazione $f(1 - x) = f(1 + x)$ ha soluzioni? In caso affermativo, determinarle.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.34 Scrivere le seguenti funzioni come composizione di funzioni

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x - 2}$

e) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x} - 1}$ g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 - x} + 2}$ h) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 1}}$

Argomento

Soluzione

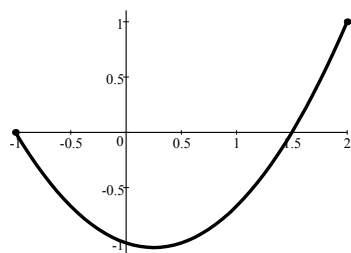
ESERCIZIO 1.35 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

a) $f(x) = 1 + |x|$ b) $f(x) = |1 + x|$ c) $f(x) = |x - 1|$ d) $f(x) = |x| - 1$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.36 In figura è disegnato il grafico di una funzione f definita in $[-1, 2]$.



Trovare gli insiemi di definizione e tracciare i grafici delle funzioni

a) $f(x + 2)$ b) $f(x) + 2$
c) $f(x - 2)$ d) $f(x) - 2$
e) $f(-x)$ f) $-f(x)$ g) $-f(-x)$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.37 Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x) = x^2 - 2x$, tracciare il grafico delle funzioni $f(-x)$, $-f(x)$, $-f(-x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.38 L'inversa di $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ è

A) $\frac{2x}{3x-1}$	B) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$	C) $\frac{1}{3-2x}$	D) $\frac{2}{3} + \frac{2}{x}$
-----------------------------	--	----------------------------	---------------------------------------

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.39 Determinare l'inversa della funzione $f(x) = 1 + \frac{1}{2x}$. Qual è il suo insieme di definizione?

Argomento

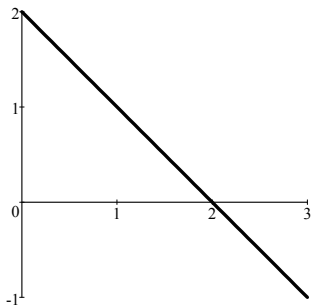
Soluzione

ESERCIZIO 1.40 Determinare l'inversa della funzione $f(x) = 2 - \frac{3}{x}$. Qual è il suo insieme di definizione?

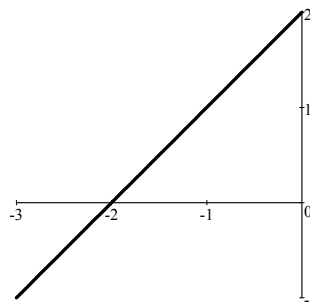
Argomento

Soluzione

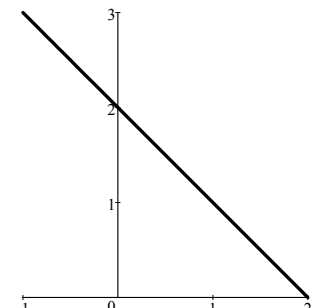
ESERCIZIO 1.41 In figura, accanto al grafico di una funzione invertibile $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, sono disegnati 5 altri grafici. Quale è il grafico della funzione inversa di f ?



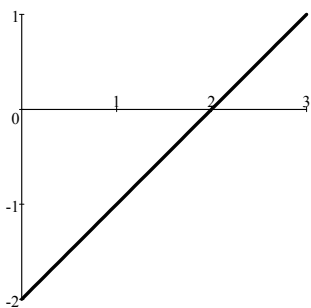
f



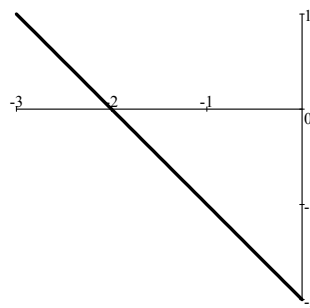
(A)



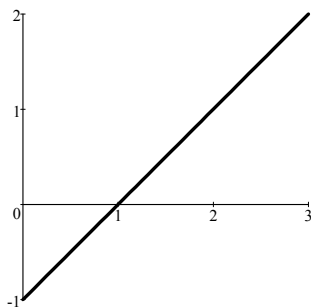
(B)



(C)



(D)



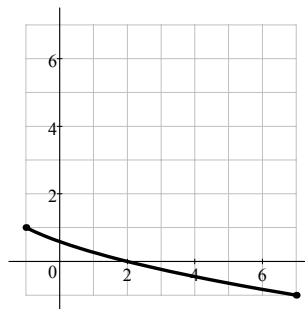
(E)

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.42 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f .

- f ha inversa sul suo insieme di definizione?
- Perché?
- tracciare il grafico di f^{-1}

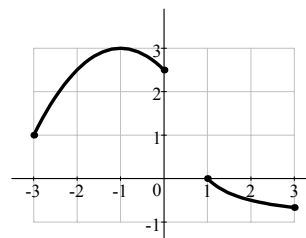


Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.43 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f . Leggere sul grafico

- a) l'insieme di definizione di f
- b) in quali intervalli f è crescente
- c) in quali intervalli f è decrescente
- d) in quali intervalli f è concava
- e) in quali intervalli f è convessa
- f) se f ha massimo nel suo insieme di definizione; se sì: quanto vale e qual è il corrispondente punto di massimo?
- g) se f ha minimo nel suo insieme di definizione; se sì: quanto vale e qual è il corrispondente punto di minimo?

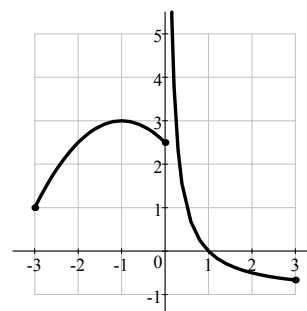


Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.44 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f . Là dove il grafico esce dalla carta quadrettata si suppone che la funzione continui ad seguire l'andamento disegnato sulla carta quadrettata. Leggere sul grafico

- a) l'insieme di definizione di f
- b) in quali intervalli f è crescente
- c) in quali intervalli f è decrescente
- d) in quali intervalli f è concava
- e) in quali intervalli f è convessa
- f) se f è superiormente limitata nel suo insieme di definizione;
- g) se f è inferiormente limitata nel suo insieme di definizione;
- h) se f ha massimo nel suo insieme di definizione;
- k) se f ha minimo nel suo insieme di definizione.

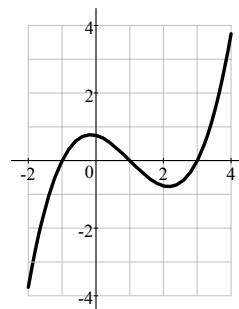


Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.45 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f . Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

- A) f è convessa in $(2, 3)$
- B) f è convessa in $(0, 4)$
- C) f è concava in $(-1, 2)$
- D) f è concava in $(-2, \frac{1}{2})$

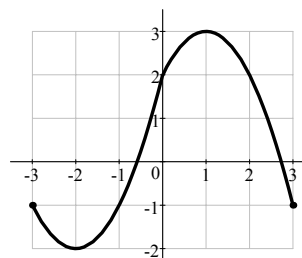


Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.46 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f . Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

- A) f è strettamente crescente in $(-2, 1)$
- B) f è strettamente decrescente in $(-3, -2) \cup (1, 3)$
- C) f è strettamente decrescente in $(1, 2)$
- D) f è invertibile
- E) f è invertibile su $(-2, 1)$
- F) f è limitata e ha valore massimo 1
- G) f è limitata e ha punto di massimo in $x = 1$

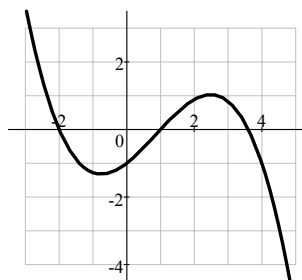


Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 1.47 In figura si è tracciato, su carta quadrettata, il grafico di una funzione f . Aiutandosi con la quadrettatura, trovare i valori di x

- a) che sono soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$
- b) che sono soluzioni della disequazione $f(x) > 0$
- c) che sono soluzioni della disequazione $f(x) < 2$



Argomento

Soluzione