Argomento 2

Soluzioni degli esercizi

Suggerimenti

Esercizio 2.5

1. La disequazione $\sqrt{|x|} > x - 1$ è sempre verificata se $x - 1 < 0$, cioè per $x < 1$; nell'altro caso, si ottiene il sistema:

$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ |x| > (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > x^2 - 2x + 1 \end{cases}$, che ha soluzioni date da $x \in [1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, le quali, unite alle precedenti, danno le soluzioni della disequazione di partenza, cioè $x \in \left(-\infty, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. La disequazione $\sqrt{4 - x^2} < x + 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x + 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 < x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ 2x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x < \frac{-\sqrt{7}-1}{2}, \; x > \frac{\sqrt{7}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}, 2\right].$$

3. La disequazione $x\sqrt{3 - 2x} \leq 1$ è equivalente ai due sistemi:

$$(1) \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x < 0 \\ x\sqrt{3 - 2x} \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (2) \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x \geq 0 \\ x^2(3 - 2x) \leq 1 \end{cases}.$$

Il primo è verificato per $x < 0$. Il secondo è equivalente al sistema $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3/2 \\ (x-1)^2(2x+1) \geq 0 \end{cases}$.

4. Dominio di $\sqrt{x}$: $[0, +\infty)$. Per tali valori anche il secondo membro della disequazione è positivo. Si possono elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione ottenendo la disequazione equivalente $9x^2 + 5x + 1 < 0$, che non ha soluzioni reali.

5. Dominio: $\mathbb{R}$; radice dispari: eleviamo entrambi i membri alla terza potenza. Si ottiene la disequazione equivalente $x \leq -x^3 \;\Leftrightarrow\; x^3 + x \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 + 1) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 0$.

6. Dominio: $x \geq 1$. In tale intervallo il secondo membro è sempre positivo, quindi la disequazione data è equivalente a: $x - 1 > x^2 + 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x + 2 < 0$. Non ci sono soluzioni reali.

Esercizio 2.11

Sono tutte disequazioni fratte, in cui compaiono al numeratore e/o al denominatore disequazioni logaritmiche o esponenziali o irrazionali, che risolte danno il segno del numeratore e del denominatore. Si utilizza poi il solito schema per le disequazioni fratte. Per esempio, risolviamo la disequazione **1:**

La disequazione è definita per $x > -1$ e $x \neq \sqrt{3}$. Lo studio del segno di N comporta la risoluzione di un sistema che tenga conto dell'insieme in cui è definito il numeratore, cioè

$$N \geq 0 \iff \begin{cases} 1 + \log_2(x+1) \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 \geq 2^{-1} \\ x > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \iff x \geq -\tfrac{1}{2}.$$

Studio del segno di $D : 3 - x^2 > 0 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Confrontiamo ora i segni nell'insieme dove la disequazione è definita, quindi solo per $x > -1$ e $x \neq \sqrt{3}$:

	-1		$-1/2$		$\sqrt{3}$		x
N	$\circ$	$- - -$	$\bullet$	———		———	
D	$\circ$	———		———	$\circ$	$- - -$	
N/D		$-$		$+$		$-$	

La disequazione è quindi soddisfatta per $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

Esercizio 2.12

Ricordarsi degli insiemi di definizione!

1. La prima disequazione è verificata per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$. La seconda è a sua volta equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1-2x}{\log x - 1} < 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x < \tfrac{1}{2}, \ \ x > e.$$

In conclusione, il sistema è verificato solo da $x > e$.

3. La prima disequazione è verificata per $0 \leq x < 4$. La seconda è sempre verificata dove definita, essendo somma di due quantità positive, quindi l'unica condizione da porre (e da non dimenticarsi) è:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0, \quad \text{che è verificata per} \ \ x \leq -1, x \geq 3.$$

In conclusione, il sistema è verificato per $3 \leq x < 4$.

Esercizio 2.20

1. La disequazione è verificata quando $2^x \leq -x$; si traccino quindi i grafici delle due funzioni, cercando si stabilire dove il grafico di 2^x sta sotto quello della retta di equazione $y = -x$. Dal disegno si osserverà che i due grafici si incontrano in un punto, la cui ascissa non è determinabile in modo esatto, ma facilmente stimabile in un valore reale α compreso tra -1 e 0.

Per le altre due disequazioni, si applica lo stesso metodo.

Soluzioni

Sol. Ex. 2.1

1. Le radici sono $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. La disequazione è verificata per $x < -1$ e per $x > \frac{1}{2}$.

2. La disequazione è verificata per $-2 \leq x \leq 1$.

3. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. La disequazione è verificata per $x < -4$ e per $x > -\frac{5}{2}$.

5. La disequazione è verificata per $x < \frac{2}{3}$.

6. La disequazione è verificata per $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$.

7. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

8. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. $3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x-3)^2$, quantità che è sempre ≥ 0. La disequazione è verificata per $x = 3$.

10. La disequazione è verificata per $0 \leq x \leq \frac{29}{6}$.

11. La disequazione è verificata per $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$.

12. La disequazione non è mai verificata.

Sol. Ex. 2.2

1. La disequazione è verificata per $-3 \leq x \leq 3$.

2. La disequazione è verificata per $x = 0, \pm 1$.

3. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. La disequazione non è mai verificata.

5. La disequazione è verificata per $x < 1$ e per $x > 5$.

6. La disequazione è verificata per $x \leq 3$.

7. La disequazione è verificata per $x < -\frac{1}{3}$ e per $x > 1$..

8. La disequazione è verificata per $x > 0$.

Sol. Ex. 2.3

1. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{7} \leq x < 1$ e per $x > 2$.

2. La disequazione è verificata per $x \leq \frac{1}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{2}$ e per $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{2} \leq x < \frac{4}{3}$.

3. La disequazione è verificata per $x = 1$ e per $x \geq 3$.

4. La disequazione è verificata per $-5 < x \leq 2$ e per $3 \leq x < 5$.

5. La disequazione è verificata per $-1 < x \leq 0$ e per $1 < x \leq 7$.

6. La disequazione è verificata per $x < -3$, per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$.

7. La disequazione è verificata per $x < 1$.
8. La disequazione è verificata per $x < 0$, per $2 < x < 4$ e per $x > 6$.
9. La disequazione è verificata per $x \leq -\sqrt{6}$ e per $-2 < x \leq \sqrt{6}$.

Sol. Ex. 2.4

1. Il sistema è verificato per $-2 \leq x \leq -1$.
2. Il sistema è verificato per $\frac{1}{5} < x < 1$ e per $x > 2$.
3. Il sistema è verificato per $x < -\frac{1}{2}$ e per $x > 2$.
4. Il sistema è verificato per $-1 < x \leq 0$.
5. Il sistema è verificato per $x \leq -2$, $1 \leq x < 3$ e per $x > 7$.
6. Il sistema è verificato per $x = -3$.

Sol. Ex. 2.5

1. La disequazione è verificata per $x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.
2. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < x \leq 2$.
3. La disequazione è verificata per $x \leq \frac{3}{2}$.
4. La disequazione non è mai verificata.
5. La disequazione è verificata per $x \leq 0$.
6. La disequazione non è mai verificata.
7. La disequazione è verificata per $x \geq \frac{3}{2}$.
8. La disequazione è verificata per $x \leq -\sqrt{3}$ e per $x \geq \sqrt{3}$.
9. La disequazione è verificata per $x < \frac{5}{3}$ e per $x \geq 7$.
10. La disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
11. La disequazione è verificata per $x > 36$.
12. La disequazione è verificata per $x \geq 2$.

Sol. Ex. 2.6

1. La disequazione è verificata per $x > \log_2 5$.
2. La disequazione è verificata per $x \leq \log 8$.
3. La disequazione è verificata per $x > 2$.
4. La disequazione data è equivalente a $2^{-2x+3} > 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2^{-2x+2} > 3 \Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{2}\log_2 3$.
5. La disequazione data è equivalente a $2^{2x} < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -1$.
6. La disequazione data è equivalente a $2^{4x+2} < 7 \Leftrightarrow x < \frac{-2 + \log_2 7}{4}$.
7. La disequazione è verificata per $x < -2$ e per $x > 2$.
8. La disequazione è verificata per $x \geq -1 + \log_6 3$.

Sol. Ex. 2.7

1. Poniamo $2^x = t$, ovviamente $t > 0$, otteniamo $t < 2$ e $t > 4$, quindi la disequazione è verificata per $x < 1$ e per $x > 2$.
2. La disequazione è verificata per $-1 < x < 1$.
3. La disequazione è verificata per $x > 0$.

Sol. Ex. 2.8

1. La disequazione è verificata per $0 < x < 2^8$.
2. La disequazione è verificata per $x > 3^5$.
3. La disequazione è verificata per $0 < x \leq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
4. La disequazione data è equivalente a $0 < x^2 - 4 < 2^2 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < x < -2$ e per $2 < x < \sqrt{8}$.
5. La disequazione è verificata per $-1 < x < 0$ e per $2 < x < 3$.
6. La disequazione è verificata per $x \geq 3$.
7. La disequazione è verificata per $3 < x < 4$.
8. La disequazione è verificata per $\dfrac{1}{3} < x \leq \dfrac{2}{3}$.
9. La disequazione è verificata per $1 < x \leq \sqrt{5}$.

Sol. Ex. 2.9

1. Poniamo, per $x > 0$, $\log_3 x = t$, otteniamo $t \leq -\dfrac{5}{3}$ e $t \geq 1$, quindi la disequazione è verificata per $0 < x \leq 3^{-\frac{5}{3}}$ e per $x \geq 3$.
2. La disequazione è verificata per $0 < x < 1$.
3. La disequazione è verificata per $\log_4 x = 1$, cioè per $x = 4$.

Sol. Ex. 2.10

1. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $0 \leq x < \dfrac{\pi}{6}$ e per $\dfrac{5\pi}{6} < x < 2\pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left[2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$ e $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Su $[-\pi, \pi)$ la disequazione è verificata per $-\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{6}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Su $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $0 \leq x \leq \pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$.
5. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$.

6. Su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

7. Su $[0, 2\pi)$ la disequazione è verificata per $\arcsin\frac{1}{3} < x < \pi - \arcsin\frac{1}{3}$ e $\pi < x < 2\pi$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(\arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$ e $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in Z$.

8. Su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la disequazione è verificata per $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\arctan 2$ e $\arctan 2 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Su tutto $\mathbb{R}$ è verificata nell'unione degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\arctan 2 + k\pi\right]$ e $\left[\arctan 2 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

9. Poichè $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha $1 + \cos^2 x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x < -\frac{2}{3}$, quindi la disequazione non è mai verificata.

Sol. Ex. 2.11

1. La disequazione è verificata per $-\frac{1}{2} \leq x < \sqrt{3}$.

2. La disequazione è verificata per $0 < x < \frac{2}{3}$ e per $x > 25$.

3. La disequazione è verificata per $-\frac{17}{9} < x \leq 0$.

Sol. Ex. 2.12

1. Il sistema è verificato per $x > e$.
2. Il sistema è verificato per $\frac{4}{3} < x \leq 8$.
3. Il sistema è verificato per $3 \leq x < 4$.

Sol. Ex. 2.13

1. La funzione è definita in $[-5, -2) \cup (-1, +\infty)$.
2. La funzione è definita in $(-5, -4] \cup (-2, +\infty)$.
3. La funzione è definita in $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$.
4. La funzione è definita in $(-3, -2] \cup (0, +\infty)$.
5. La funzione è definita per $x > -2$, con $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
6. La funzione è definita in $(-3, -2) \cup (2, +\infty)$.

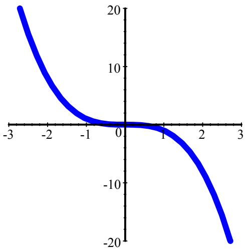
Sol. Ex. 2.14

1. La funzione è positiva in $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$ e negativa in $\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2, \frac{10}{3}\right)$.

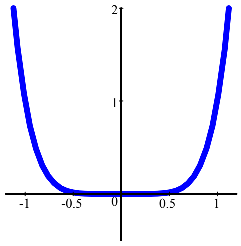
2. La funzione è positiva in $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ e negativa in $\left(1, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

3. La funzione è positiva in $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e negativa in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

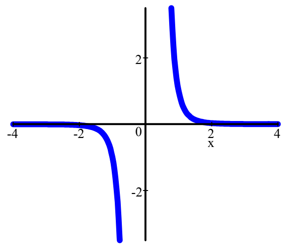
Sol. Ex. 2.15

1. 

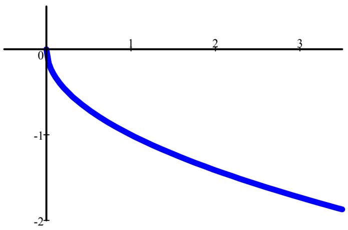
$y = -x^3$, $E = \mathbb{R}$

2. 

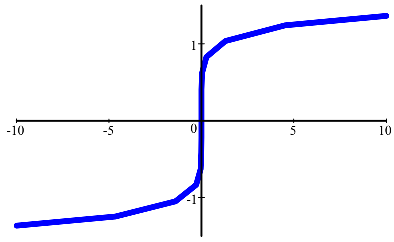
$y = x^6$, $E = \mathbb{R}$

3. 

$y = x^{-5}$, $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

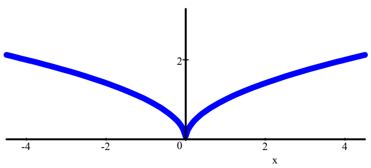
4. 

$y = -\sqrt{x}$, $E = [0, +\infty)$

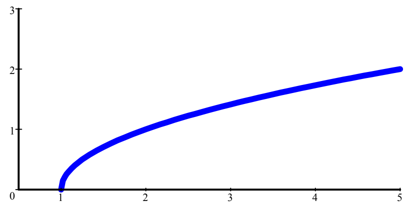
5. 

$y = \sqrt[7]{x}$, $E = \mathbb{R}$

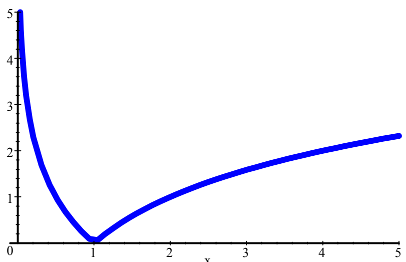
Sol. Ex. 2.16

1. 

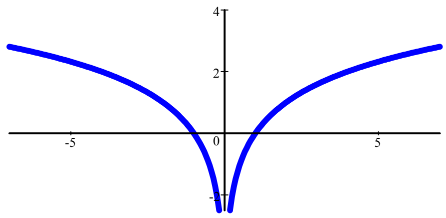
$y = \sqrt{|x|}$, $E = \mathbb{R}$

2. 

$y = \sqrt{x - 1}$, $E = [1, +\infty)$

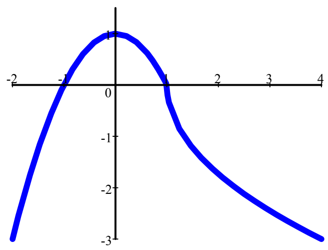
3. 

$y = |\log_2 x|$, $E = (0, +\infty)$

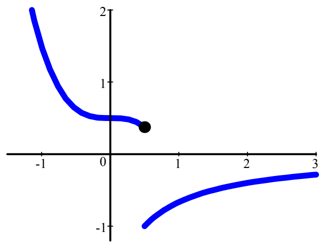
4. 

$y = \log_2 |x|$, $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

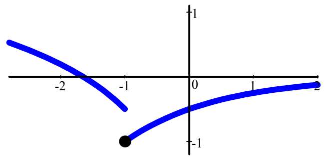
Sol. Ex. 2.17



1.



2.



3.

da cui si legge che:

	1.	2.	3.
a) f è crescente in	$(-\infty, 0)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	$(-1, +\infty)$
b) f è decrescente in	$(0, +\infty)$	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$(-\infty, -1)$
c) f è concava in	$(-\infty, 1)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ed in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	$(-\infty, -1)$ ed in $(-1, +\infty)$
d) f è convessa in	$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	mai
e) f è superiormente limitata?	Sì	No	No
f) f è inferiormente limitata?	No	Sì	Sì
g) f ha massimo?	Sì e vale 1	No	No
h) f ha minimo?	No	No	Sì e vale -1
k) f è iniettiva?	No	Sì	No

Sol. Ex. 2.18

La funzione riportata in [C].

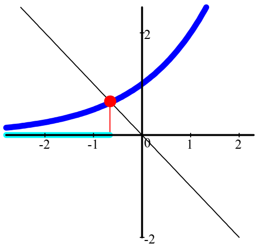
Sol. Ex. 2.19

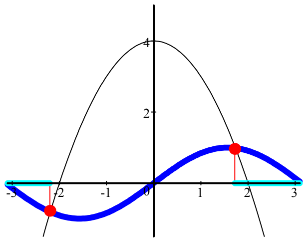
Grafico	**Funzione**
A	4
B	1
C	2
D	3

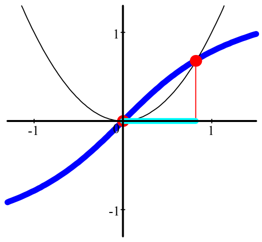
a) La disequazione $\sqrt[2]{|x|} < 1$ è verificata per $-1 < x < 1$.

b) La disequazione $|2^x - 1| \geq 1$ è verificata per $x \geq 1$.

Sol. Ex. 2.20


1. 2^x (medio), $-x$ (sottile)


2. $\sin x$ (medio), $4-x^2$ (sottile)


3. $\arctan x$ (medio), x^2 (sottile)

1. La disequazione è verificata per $x \leq \alpha$ (con $-1 < \alpha < 0$).
2. La disequazione è verificata per $x < \alpha$ e per $x > \beta$ (con $-\pi < \alpha < 0 < \beta < 2$).
3. La disequazione è verificata per $0 < x < \alpha$ (con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$).

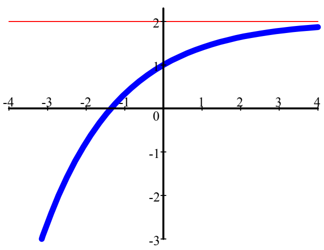
Sol. Ex. 2.21

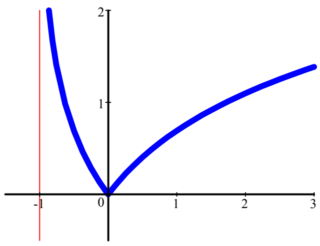
1. La funzione è definita in $(-\infty,-1) \cup (1,3]$.
2. La funzione è definita in $(2, 2+e^{-1}] \cup (3,+\infty)$.
3. La funzione è definita in $(0,1]$.
4. La funzione è definita in $\left(\dfrac{1}{12},+\infty\right)$.

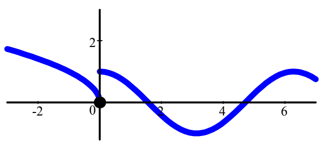
Sol. Ex. 2.22

1. La funzione è definita in $\left(\dfrac{2}{3},1\right) \cup (1,+\infty)$, positiva in $(1,+\infty)$ e negativa in $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$.
2. La funzione è definita in $\left[-\dfrac{3}{2},2\right) \cup (2,+\infty)$, positiva in $(2,3)$ e negativa in $\left(-\dfrac{3}{2},2\right) \cup (3,+\infty)$.
3. La funzione è definita in $(-1,0) \cup (2,+\infty)$, positiva in $(2,+\infty)$ e negativa in $(-1,0)$.
4. La funzione è definita in $(-1,2)$, positiva in $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ e negativa in $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Sol. Ex. 2.23


1.

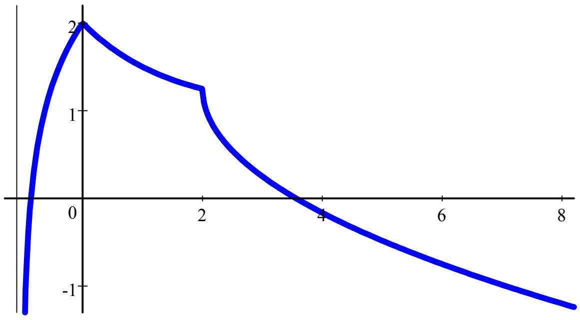

2.


3.

da cui si legge che:

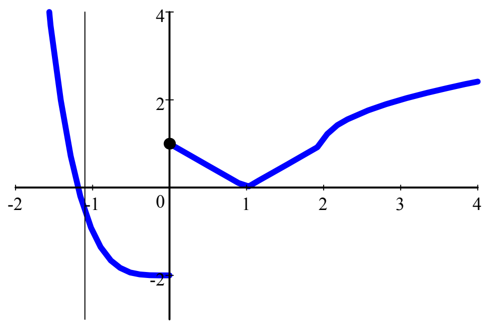
	1.	2.	3.
a) f è iniettiva nel suo campo di esistenza	SI	NO	NO
b) f è decrescente in $(-1, 0)$	NO	SI	SI

Sol. Ex. 2.24



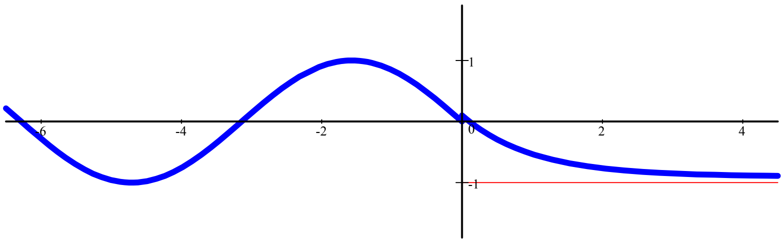
a) f non è limitata in $(-1, +\infty)$;
b) f ha massimo (2) nel suo insieme di definizione;
c) f non ha minimo nel suo insieme di definizione;
d) f è crescente in $(-1, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$;
e) f è concava in $(-1, 0)$;
f) f non è concava in $(-1, +\infty)$.

Sol. Ex. 2.25



a) f è crescente in $(1, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, 1)$;
b) f è convesssa in $(-\infty, 0)$ ed in $(0, 2)$ e concava in $(2, +\infty)$;
c) f non ha nè massimo nè minimo assoluti nel suo insieme di definizione.

Sol. Ex. 2.26



a) f è limitata nel suo insieme di definizione;
b) l'estremo superiore in $(-\infty, 0)$ coincide con il massimo e vale 1;
c) l'estremo inferiore in $(0, +\infty)$ vale -1 (non è il minimo!).