Argomento 1

Numeri reali. Funzioni e loro grafici

Parte B - Funzioni e loro grafici

Funzioni reali di variabile reale

Definizioni 1.11

- Supponiamo che A sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e che esista una legge che ad ogni elemento x di A associa *uno e un solo* numero reale. In questo modo viene definita una **funzione** f da A in $\mathbb{R}$ che indichiamo con $f : A \to \mathbb{R}$.
- L'insieme A è detto **dominio di** f : per definire la funzione esso è importante quanto la legge.
- Per ogni x di A il numero associato ad x si indica con $f(x)$ ed è detto **immagine di** x **attraverso** f.
- L'insieme $f(A) = \{y \in \mathbb{R}$ tali che esista almeno un $x \in A$ con $f(x) = y\}$, è detto **immagine di** A tramite f.
- L'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

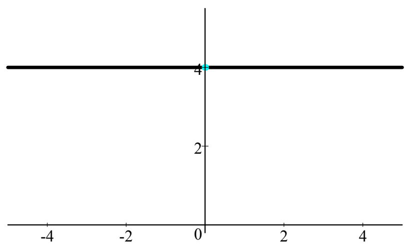
è detto **grafico della funzione** $f : A \to \mathbb{R}$.
Con queste notazioni, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta variabile **dipendente**[(1)].

Introducendo la nozione di grafico si ha in mente di fornire una descrizione geometrica della funzione che ne visualizzi le proprietà: in particolare, nel piano cartesiano, il dominio è un sottoinsieme dell'asse delle ascisse, l'immagine $f(A)$ è un sottoinsieme dell'asse delle ordinate, mentre il grafico è un insieme di punti con la proprietà che, *su ogni retta parallela all'asse* y passante per un punto $(a, 0)$ del dominio, *c'è uno e un sol punto del grafico.*

Esempio 1.12

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 4$

è una funzione avente:
dominio $\mathbb{R}$
e
immagine (in azzurro in figura) $f(\mathbb{R}) = \{4\}$.

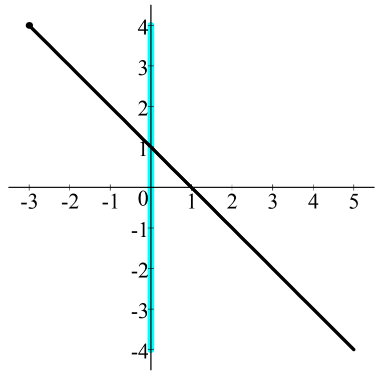


[1)] Attenzione: si può decidere, a seconda delle necessità, di dare alla variabile indipendente e a quella dipendente nomi diversi da x e y. Ad esempio $t = f(s)$ rappresenta una funzione con variabile indipendente s e variabile dipendente t.

Esempio 1.13 [2]

$f : [-3, 5) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - x$

è una funzione avente:
dominio $[-3, 5)$
e
immagine (in azzurro in figura) $f\left([-3, 5)\right) = (-4, 4]$.



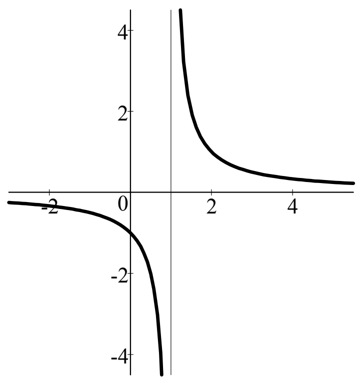
Esempio 1.14

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ è una funzione avente dominio $\mathbb{R}$ e immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$.

Esempio 1.15

$f : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

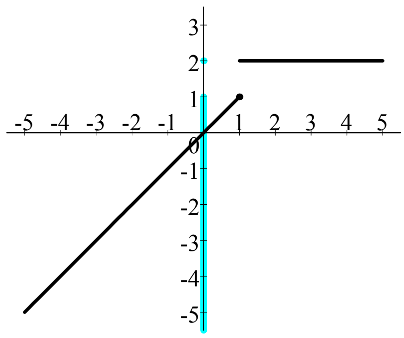
è una funzione avente:
dominio $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
e immagine
$f\left((-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\right) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Esempio 1.16

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

è una funzione avente:
dominio $\mathbb{R}$
e
immagine (in azzurro in figura) $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1] \cup \{2\}$.



[2] Il punto in evidenza che delimita alcune curve indica, qui e negli esempi successivi, che si deve pensare quel punto appartenente al grafico; invece il punto non appartiene al grafico se non è in evidenza.

Esempi 1.17

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \pm x$ **non** è una funzione perchè ad ogni $x \neq 0$ sono associati due valori, $+x$ e $-x$, e **non uno solo**.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 3 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ **non** è una funzione perchè ad ogni x dell'intervallo $(1, 3]$ sono associati due valori.

A riprova del fatto che le leggi degli esempi 1.17 non descrivono funzioni, si noti che in entrambi i casi, se si disegna sul piano cartesiano l'insieme dei punti $B = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x \in \mathbb{R}\}$, c'è almeno una retta parallela all'asse y su cui si trovano <u>due</u> punti di B: in entrambi i casi può andar bene ad esempio la retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

Per assegnare una funzione si devono specificare il dominio A e la legge f. Quindi due **funzioni** sono **uguali** se i loro domini coincidono e se ad ogni elemento del dominio associano lo stesso valore.

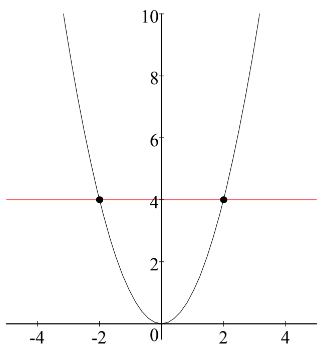
Spesso si assegna una funzione specificando solo la legge. In questo caso il dominio è il più grande sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ tale che per ogni x di I esiste il numero reale $f(x)$. Il sottoinsieme I è detto **insieme di definizione** o **campo di esistenza** della funzione f e viene denotato con $E(f)$.

Esempi 1.18

- $f(x) = \dfrac{1}{3x - 2 - x^2}$ ha insieme di definizione $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, poiché il denominatore deve essere diverso da zero.
- $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ ha insieme di definizione $(-\infty, 1/2]$, poiché il radicando, $1 - 2x$, deve essere ≥ 0.
- $f(x) = \dfrac{1}{4 - \sqrt{x}}$ ha insieme di definizione $[0, 16) \cup (16, +\infty)$, poiché il radicando, x, deve essere ≥ 0 e il denominatore deve essere diverso da zero.

Iniettività

Non è detto che a due valori distinti di x la funzione f faccia corrispondere numeri diversi. Negli Esempi 1.12 e 1.16 la legge stessa con cui è definita f mostra che la funzione associa a valori distinti di x lo stesso numero; nell'Esempio 1.14 la stessa cosa si vede dal grafico: basta trovarne le intersezioni con rette parallele all'asse x. Ad esempio intersecando il grafico di $f(x) = x^2$ con la retta di equazione $y = 4$ si trovano i due punti di ascissa $x = 2$ e $x = -2$.



Definizione 1.19 Si dice che la funzione è **iniettiva su** A se per ogni coppia di elementi s e t di A con $s \neq t$ risulta $f(s) \neq f(t)$. Questo è equivalente a dire che se $f(s) = f(t)$ allora $s = t$.

Graficamente questo significa che ogni retta orizzontale interseca il grafico di f al più in un punto.

Di conseguenza se f è iniettiva e y è un elemento di $f(A)$ c'è un solo x in A tale che risulti $y = f(x)$.

Esempio 1.20 La funzione: $f(x) = 3x+2$ è iniettiva: infatti si ha $f(s) = f(t)$ solo se $3s+2 = 3t+2$ cioè, risolvendo, solo se $s = t$.

Esempio 1.21 La funzione: $f(x) = x^3$ è iniettiva: infatti si ha $f(s) = f(t)$ solo se $s^3 = t^3$, cioè, risolvendo, solo se $s = t$.

Composizione di funzioni

Consideriamo due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $f(A) \subseteq B$, da un elemento x di A si può passare a un elemento $t = f(x)$ di B e da questo a un elemento $y = g(f(x))$ di $g(B)$. Ciò porta alla seguente

Definizione 1.22 Date due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$, definiamo **funzione composta** $g \circ f$ la funzione $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che associa ad x il valore $g(f(x))$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Si usa sintetizzare tutto il procedimento con due diagrammi (uno sugli insiemi e l'altro, parallelo, sugli elementi):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & g(B) \\ & f(A) \subseteq B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, dashed, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & g(f(x)) \\ & f(x) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Prima di esaminare qualche esempio, ribadiamo che per calcolare il valore della funzione $g \circ f$ in un punto x di A prima si calcola il valore $t = f(x)$ di f in x e successivamente si calcola il valore $g(t)$ di g in t.

Esempio 1.23 Consideriamo le funzioni: $f(x) = 3x + 2$, definita in $A = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$, definita in $B = \mathbb{R}$. Si ha $f(A) = \mathbb{R} = B$ e la funzione composta $g \circ f$ è definita da

$$(g \circ f)(x) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

Esiste anche la funzione composta $f \circ g$, poiché $g(B) = [0, +\infty) \subset A$; ma $(f \circ g)(x) = f(x^2) = 3x^2+2$: questa legge è diversa dalla $(g \circ f)(x)$.

Esempio 1.24 Consideriamo le funzioni: $f(x) = \sqrt{x}$, definita in $A = [0, +\infty)$ e $g(x) = -|x| - 1$, definita in $B = \mathbb{R}$. Si ha $f(A) = [0, +\infty) \subset B$ e la funzione composta $g \circ f$ è definita da $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = -|\sqrt{x}| - 1 = -\sqrt{x} - 1$. Invece la funzione $f \circ g$ non esiste per nessun valore reale di x, poiché $g(B) = (-\infty, -1]$ non ha nessun punto in comune con il dominio $[0, +\infty)$ di $f(x)$.

Gli esempi che seguono mostrano come individuare le **funzioni componenti** di una funzione composta. In qualche caso c'è un solo modo di scomporre una funzione, in altri no. Se si scompone una funzione per poter fare su di essa "dei conti" (ad esempio, ricerca dell'insieme di definizione o, come vedremo negli argomenti successivi, calcolo di limiti o derivate) si favoriscono le scomposizioni più semplici. In qualche caso invece una scomposizione apparentemente più complicata può aiutare a vedere meglio particolari proprietà o evidenziare una particolare costruzione.

Esempio 1.25 La funzione $F(x) = \sqrt{x-1}$ si può descrivere solo come segue: "prendi un qualunque numero reale x (purché ≥ 1): ad esso sottrai 1; poi calcola la radice quadrata del risultato". In simboli:

$$x \xrightarrow{(\,)-1} x-1 \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{x-1}$$

e quindi si può vedere come la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x-1$, $g(t) = \sqrt{t}$.

Esempio 1.26 La funzione $F(x) = 3(x-2)+1$, che si può leggere come: "al triplo della differenza tra x e 2 aggiungi 1", è ottenuta attraverso i seguenti 3 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\,)-2} x-2 \xrightarrow{3\cdot(\,)} 3(x-2) \xrightarrow{(\,)+1} 3(x-2)+1$$

e quindi è la funzione composta $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$ con $f(x) = x-2$, $g(t) = 3t$, $h(z) = z+1$.
Ma la stessa funzione si riscrive $F(x) = 3x - 5$ e si può dunque ottenere facendo solo i seguenti due passaggi:

$$x \xrightarrow{3\cdot(\,)} 3x \xrightarrow{(\,)-5} 3x-5$$

e quindi si può vedere come la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = 3x$, $g(t) = t-5$.

Traslazioni

Particolari esempi di funzioni composte sono quelle ottenute componendo la funzione f con la funzione $g(t) = t + c$ (ove c denota un numero reale), in ciascuno dei modi possibili:

$$g \circ f \text{ e } f \circ g \;{}^{(3)}.$$

[3] Attenzione: mentre $g \circ f$ è definita purché sia definita f, può succedere che l'insieme di definizione di $f \circ g$ cambi a seconda del numero reale c scelto.

Osservazione 1.27 Comunque si scelga il numero reale c,

- il grafico della funzione composta $f(x)+c$ si ottiene traslando verticalmente il grafico di $f(x)$ di c unità nel verso positivo dell'asse y
- il grafico della funzione composta $f(x+c)$ si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di $f(x)$ di c unità nel verso negativo dell'asse x.

Perciò queste composizioni di funzioni vengono talora dette traslazioni della funzione f.

Esempio 1.28 La funzione $F(x) = x^2 + 2$ è ottenuta attraverso i seguenti 2 passaggi:

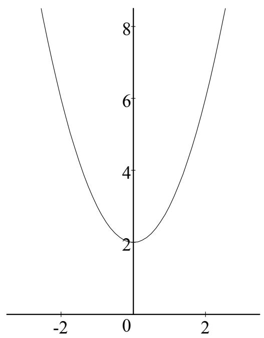
$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{(\ )+2} x^2 + 2$$

e quindi è la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2$, $g(t) = t + 2$ [4].
Il grafico della funzione F si ottiene per traslazione della parabola $y = x^2$ di 2 unità nel verso positivo dell'asse y.

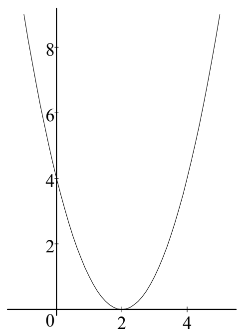
Esempio 1.29 La funzione $F(x) = (x-2)^2$ è ottenuta con i seguenti 2 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\ )-2} x - 2 \xrightarrow{(\ )^2} (x-2)^2$$

e quindi è la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x - 2$, $g(t) = t^2$.
Il grafico della funzione F si ottiene per traslazione della parabola $y = x^2$ di 2 unità nel verso positivo dell'asse x.



Esempio 1.28



Esempio 1.29

Di solito è abbastanza facile rendersi conto se una funzione è ottenuta da un'altra per traslazione nella direzione dell'asse y, mentre è meno facile visualizzare le eventuali traslazioni orizzontali.

---

[4] In questo caso non c'è modo di interpretare diversamente la composizione.

Esempio 1.30 È chiaro che la funzione $F(x) = x^2 + x - 2$ si può scomporre semplicemente così

$$x \xrightarrow{(\ )^2 + (\ )} x^2 + x \xrightarrow{(\ ) - 2} (x^2 + x) - 2$$

cioè $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ con $f(x) = x^2 + x$ e $g(t) = t - 2$, per cui il grafico di F è ottenuto traslando quello di f di 2 unità nella direzione negativa dell'asse y.
Ma $F(x) = x^2 + x - 2$ è anche ottenuta con i seguenti 3 passaggi:

$$x \xrightarrow{(\ ) + \frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} \xrightarrow{(\ )^2} x^2 + x + \frac{1}{4} \xrightarrow{(\ ) - \frac{9}{4}} x^2 + x - 2$$

cioè è la funzione composta $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$ con $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$, $g(t) = t^2$ e $h(z) = z - \dfrac{9}{4}$.
Quindi si può anche dire che il grafico della funzione F è ottenuto traslando la parabola $y = x^2$ di $1/2$ nella direzione negativa dell'asse x e di $9/4$ nella direzione negativa dell'asse y [5].

In genere il primo tipo di scomposizione è più che sufficiente per applicare regole di calcolo, il secondo è invece di aiuto quando si cerca di individuare l'andamento di un grafico utilizzando grafici già noti.

Simmetrie

Particolari esempi di funzioni composte sono quelle ottenute componendo la funzione f con la funzione $g(t) = -t$, in ciascuno dei modi possibili: $g \circ f$ e $f \circ g$. Le funzioni così ottenute vengono talora dette simmetriche della funzione f: infatti vale la seguente

Osservazione 1.31

- Il grafico della funzione composta $f(-x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y,
- il grafico della funzione composta $-f(x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x,
- il grafico della funzione composta $-f(-x)$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'origine O del sistema di riferimento;

ne segue che $-f(x)$ ha grafico simmetrico del grafico di $f(-x)$ rispetto all'origine O del sistema di riferimento.

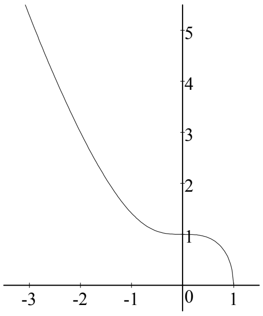
Ad esempio, se il primo grafico in figura è quello di $f(x)$, gli altri sono, nell'ordine, i grafici di $f(-x)$ e $-f(-x)$.

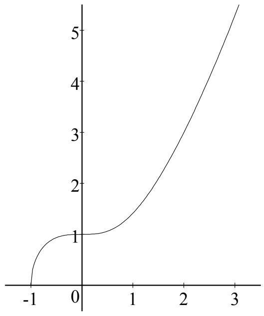
---

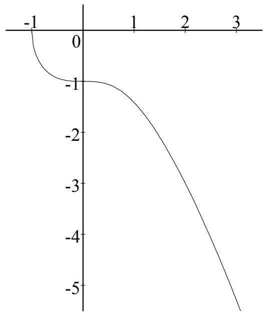
[5] Non si può invece scomporre

$$x \xrightarrow{(\ )^2} x^2 \xrightarrow{???} (x^2) + x - 2$$

poiché non c'è una legge univoca che applicata a x^2 dia $(x^2) + x - 2$





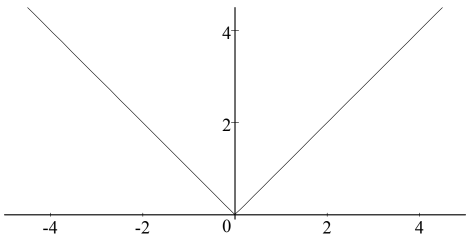


Definizioni 1.32

- Se $f(-x) = f(x)$ per ogni x del dominio di f la funzione è detta **pari**. Essa ha grafico simmetrico rispetto all'asse y.
- Se $f(-x) = -f(x)$ per ogni x del dominio di f la funzione è detta **dispari**. Essa ha grafico simmetrico rispetto all'origine O del sistema di riferimento.

Esempi 1.33

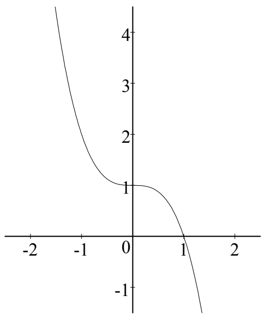
- La funzione $f(x) = x^3$ è dispari, mentre la funzione $f(x) = x^2$ è pari.
- Anche la funzione modulo di x: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è pari; essa ha questo grafico



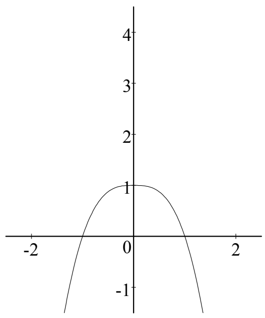
Può essere interessante vedere che cosa succede componendo nei due modi possibili la funzione $f(x) = |x|$ con un'altra funzione $g(x)$. Per definizione

$$g(f(x)) = g(|x|) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad \text{mentre} \quad f(g(x)) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}.$$

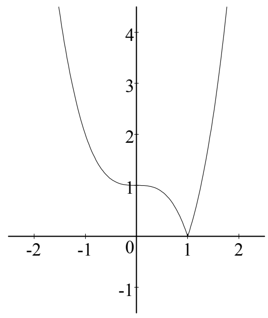
Allora, se il primo grafico nella figura successiva è quello di $g(x)$, gli altri sono, nell'ordine, i grafici di $g(|x|)$ e $|g(x)|$



$g\,(x)$



$g(|x|)$



$|g(x)|$

cioè:

- il grafico di $g(|x|)$ si ottiene facendo il simmetrico rispetto all'asse y della parte del grafico di g che sta nel semipiano delle x positive (e quindi $g(|x|)$ è una funzione pari)
- il grafico di $|g(x)|$ si ottiene facendo il simmetrico rispetto all'asse x della parte del grafico di g che sta nel semipiano delle y negative (e quindi $|g(x)|$ non assume mai valori negativi e non ha, a priori, particolari simmetrie)

Funzione inversa

Abbiamo visto che se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva, per ogni elemento y di $f\,(A)$ c'è un solo x in A tale che risulti $y = f\,(x)$. Si può allora definire una funzione $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni y di $f\,(A)$,

$$g(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y.$$

La funzione così definita è tale che per ogni x di A si ha $g(f(x)) = x$ e per ogni y di $f(A)$ si ha $f(g(y)) = y$: per questo di solito si indica con f^{-1}. Riassumendo

Definizione 1.34 Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. La funzione $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo per ogni y di $f\,(A)$

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y.}$$

si chiama **funzione inversa** di f.

Per quanto osservato prima della definizione, per ogni x di A si ha

$$x \xrightarrow{f} f\,(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$$

e per ogni y di $f(A)$ si ha

$$y \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}\,(y) \xrightarrow{f} y.$$

Non sempre, anche se esiste, si può ricavare esplicitamente la funzione inversa. Nel caso degli Esempi 1.20 e 1.21, si può: basta scrivere $f(x) = y$ e risolvere questa come un'equazione in x cioè "ricavare la x in funzione di y".

Esempio 1.20 bis $f(x) = 3x + 2 = y$ implica $x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$: quindi $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$ [6]. In effetti: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x + 2) = \frac{1}{3}(3x + 2) - \frac{2}{3} = x$ e $f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right) + 2 = y$.

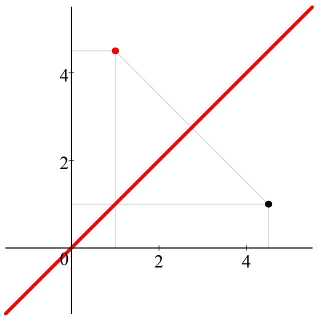
Esempio 1.21 bis $f(x) = x^3 = y$ implica $x = \sqrt[3]{y}$: quindi $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. La verifica si fa come sopra: da notare anzi che posso dire che "definisco radice cubica" la funzione inversa della potenza terza.

Esempio 1.14 bis Si è già detto che $f(x) = x^2$ non è iniettiva se si prende come dominio tutto $\mathbb{R}$. Lo è però se si restringe il dominio a $[0, +\infty)$: verificarlo sul grafico! Come negli esempi precedenti, $f(x) = x^2 = y$ con $x \geq 0$ implica $x = \sqrt{y}$: quindi in questo caso $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Si può fare lo stesso ragionamento anche se $x \leq 0$: ma in questo caso la soluzione è $x = -\sqrt{y}$, quindi l'inversa della funzione $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ è $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

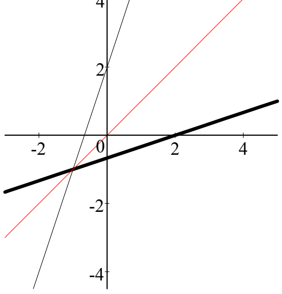
Per quanto riguarda il grafico $\mathcal{G}(f^{-1})$ della funzione f^{-1}, osserviamo che un punto $P = (t, s)$ appartiene al grafico di f^{-1} se e solo se $s = f^{-1}(t)$; questo succede se e solo se $f(s) = t$ cioè se e solo se $P' = (s, t)$ appartiene al grafico $\mathcal{G}(f)$ di f :

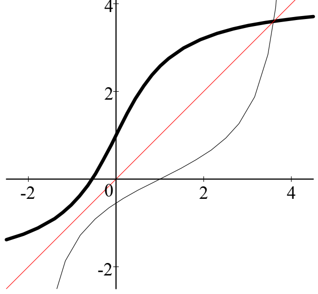
$$P = (t, s) \in \mathcal{G}(f^{-1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad P' = (s, t) \in \mathcal{G}(f),$$

cioè ogni punto P del grafico di f^{-1} si ottiene da un punto P' del grafico di f scambiando le coordinate. Ma scambiare le coordinate di un punto nel piano equivale ad operare una simmetria rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante:



Di conseguenza il grafico di f^{-1} è simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo-terzo quadrante.
L'idea è illustrata in ciascuna delle due figure sottostanti accostando i grafici di f (linea sottile) e di f^{-1} (linea spessa). In particolare nella prima figura sono rappresentati i grafici di $f(x) = 3x + 2$ e di $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.





[6] Attenzione a non confondere! La funzione $h(x) = \frac{1}{3x+2}$ è la reciproca della funzione $f(x) = 3x + 2$, NON la sua inversa!

Funzioni monotòne

Definizione 1.35 Consideriamo una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Essa è detta

(a) monotòna strettamente crescente su A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) < f(t)$

(b) monotòna strettamente decrescente su A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) > f(t)$

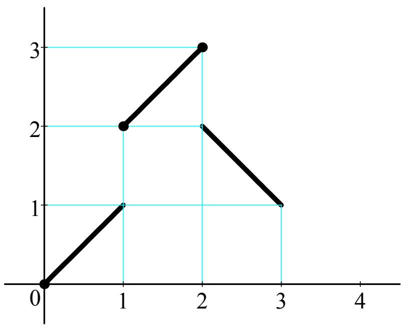
(c) monotòna (debolmente) **crescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) \leq f(t)$, ma c'è almeno una coppia di elementi s, t di A per i quali risulta $f(s) = f(t)$

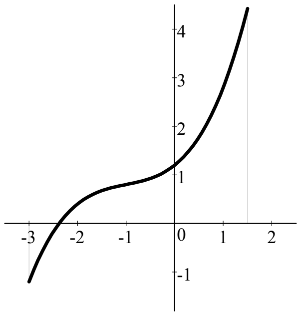
(d) monotòna (debolmente) **decrescente su** A se per ogni coppia di elementi s, t di A con $s < t$ risulta $f(s) \geq f(t)$, ma c'è almeno una coppia di elementi s, t di A per i quali risulta $f(s) = f(t)$.

Una funzione è detta **strettamente monotòna su** A se per essa vale una delle due condizioni **(a)** o **(b)**.
Osserviamo che *ogni funzione strettamente monotona su* A è iniettiva su A e quindi *ha inversa su* A [7].
Una funzione è detta **debolmente monotòna su** A se per essa vale una delle due condizioni **(c)** o **(d)**.
Osserviamo che le funzioni debolmente monotone su A non sono iniettive su A (anche se possono esserlo su dei sottoinsiemi di A).
Le funzioni costanti sono esempi di funzioni debolmente monotone: per esse **(c)** e **(d)** valgono contemporaneamente.

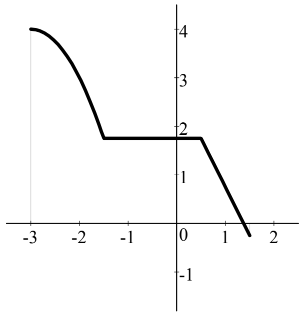
---

[7] Ma non è vero che tutte le funzioni iniettive siano monotòne. Ad esempio
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 4-x & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$
non è monotòna, ma è iniettiva, come si vede dal grafico:





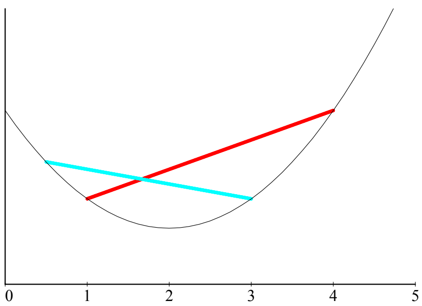
Funzione strettamente crescente su $[-3{,}1.5]$



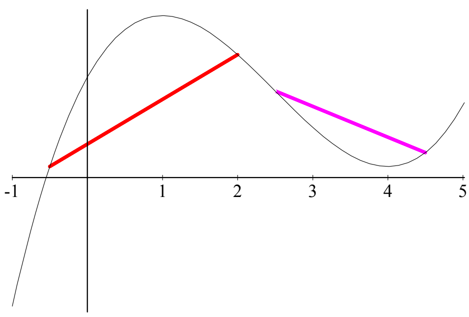
Funzione (debolmente) decrescente su $[-3{,}1.5]$

Funzioni convesse e concave

Definizione 1.36 Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta **convessa** (o concava verso l'alto) nell'intervallo (a, b) se, per ogni coppia di elementi s e t in (a, b) con $s < t$, il segmento che unisce i punti $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ sta tutto sopra il grafico di f in (s, t) [8].
Analogamente la funzione f è detta **concava** (verso il basso) nell'intervallo (a, b) se per ogni coppia di elementi s e t in (a, b) il segmento che unisce i punti $(s, f(s))$ e $(t, f(t))$ sta tutto sotto il grafico di f in (s, t).



Funzione convessa in $[0{,}5]$



Funzione nè concava nè convessa in $[-1{,}5]$

[8] Questa ultima proprietà si esprime in formule richiedendo che per ogni $x \in (a, b)$ valga la relazione

$$f(x) \leq f(s) + \frac{f(t) - f(s)}{t - s}(x - s)$$

o anche che, per ogni $\lambda \in (0, 1)$, valga la relazione

$$f(\lambda s + (1 - \lambda) t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(t).$$

Funzioni limitate. Massimi e minimi

Definizione 1.37 Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **limitata in** A se la sua immagine

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tali che esista almeno un } x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

è un insieme limitato.
Questo significa che esistono due numeri h, $k \in \mathbb{R}$ per i quali vale la relazione

$$h \leq f(x) \leq k \qquad\qquad \text{per ogni } x \in A;$$

e quindi il grafico di f sta tutto sotto la retta $y = k$ e tutto sopra la retta $y = h$.
Similmente

Definizioni 1.38

- Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **superiormente limitata in** A se la sua immagine $f(A)$ è un insieme superiormente limitato, cioè esiste un numero reale k tale che $f(x) \leq k$ per ogni $x \in A$. L'estremo superiore di $f(A)$ è detto **estremo superiore di** f **in** A e si indica con [9] $\sup f$.
- Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitata in** A se la sua immagine $f(A)$ è un insieme inferiormente limitato, cioè esiste un numero reale h tale che $h \leq f(x)$ per ogni $x \in A$. L'estremo inferiore di $f(A)$ è detto **estremo inferiore di** f **in** A e si indica con $\inf f$.
- Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ ha **massimo** (assoluto) M (e si scrive $\max f = M$) se M è il massimo dell'insieme immagine $f(A)$. In tal caso esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ risulta $f(x) \leq f(x_0) = M$ e il punto x_0 è detto **punto di massimo per** f **in** A.
- Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ ha **minimo** (assoluto) m (e si scrive $\min f = M$) se m è il minimo dell'insieme immagine $f(A)$. In tal caso esiste un punto $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ risulta $m = f(x_0) \leq f(x)$ e il punto x_0 è detto **punto di minimo per** f **in** A.

Esempi 1.39

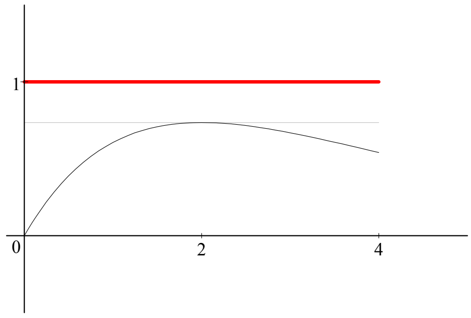
- La funzione $f(x) = 1 - x$ è limitata in $(0, 1]$, ha minimo $m = 0$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$ (punto di minimo), ma non ha massimo. Il suo estremo superiore è 1.
- La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è limitata in $[1, +\infty)$, ha massimo $M = 1$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$ (punto di massimo), ma non ha minimo. Il suo estremo inferiore è 0.
- La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è limitata inferiormente in $(0, 1]$, ha minimo $m = 1$, assunto in corrispondenza al punto $x_0 = 1$, ma non è limitata.

Come già accennato, si può stabilire se una funzione è limitata guardando se il suo grafico è tutto compreso tra due rette parallele all'asse x. Nell'esempio in figura

[9] Se occorre distinguere l'estremo superiore assunto dalla funzione f su un insieme A da quello assunto su un insieme B, si possono usare le notazioni:

$$\sup\{f(x)\,|x \in A\} \qquad \text{o} \qquad \sup_{x \in A}\{f(x)\} \qquad \text{o} \qquad \sup_A f.$$

Notazioni analoghe vengono usate nelle definizioni successive.



$$f : [0,4] \to R$$

la funzione è sicuramente limitata poiché il grafico è compreso tra le rette $y = 0$ e $y = 1$.
La retta $y = 0$ interseca il grafico nel punto $(0, 0)$: questo significa che $x_0 = 0$ è punto di minimo e il minimo di f su $[0, 4]$ è 0.
Invece $y = 1$ non interseca il grafico, anzi si vede che ci sono (infinite) rette "a quota più bassa di $y = 1$" (cioè della forma $y = k$ con $k < 1$) che stanno sopra il grafico: ciò significa che 1 è un maggiorante dell'insieme $f([0, 4])$, ma non il suo estremo superiore. In realtà è chiaro dalla figura che la funzione ha un massimo: per trovarlo, consideriamo le rette $y = k$ con $k < 1$, a partire da $y = 1$, finché in corrispondenza a una retta di equazione $y = k^*$ troviamo un'intersezione: k^* è il massimo.

Segno e zeri di una funzione

Finora abbiamo messo in evidenza quelle proprietà delle funzioni che non variano anche se si operano traslazioni del grafico: ad esempio se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è monotòna crescente in A anche $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) + c$ è monotòna crescente in A e, analogamente, risulta monotòna crescente in $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x + c \in A\}$ la funzione $h : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = f(x + c)$.
Non è invece di questo tipo una proprietà come il segno, che pure talora si dimostra utile per tracciare il grafico della funzione.

Definizione 1.40 Si dice che

- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è **positiva su** A se per ogni x di A risulta $f(x) > 0$
- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è **negativa su** A se per ogni x di A risulta $f(x) < 0$
- $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **ha uno zero in** A se esiste un x_0 di A tale che $f(x_0) = 0$ [10].

---

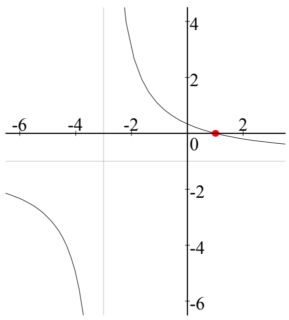
10) ATTENZIONE: quando si dice che f ha uno zero in A si intende che ne ha almeno uno, non che ne ha esattamente uno. Ancora, non è detto che se $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è positiva su (a, c) e negativa su (c, b) allora f abbia uno zero in c. Vedi ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in (0, 2] \\ -1 \text{ se } x \in (2, 3) \end{cases} .$$

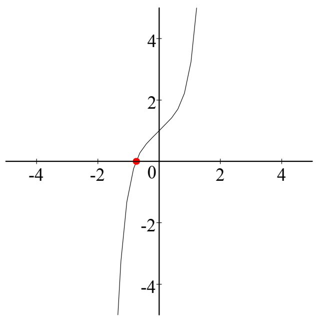
Esempio 1.41 La funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$, che ha insieme di definizione $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, ha uno zero solo in $x_0 = 1$, come si vede risolvendo l'equazione $\dfrac{1-x}{x+3} = 0$ (vedi Minimat, lezione 4, equazioni fratte). Invece, studiando la disequazione fratta $\dfrac{1-x}{x+3} > 0$ (vedi Minimat, lezione 5), si vede che essa è verificata dagli x appartenenti all'intervallo $(-3, 1)$: quindi la funzione è positiva su questo intervallo, mentre è negativa sull'insieme $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Quando si traccia il grafico di f queste osservazioni dicono che

- nell'intervallo $(-3, 1)$ il grafico sta sopra l'asse x
- nell'insieme $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ il grafico sta sotto l'asse x
- il grafico interseca l'asse x solo nel punto di ascissa 1.

Quando avremo anche tutti gli altri strumenti che servono per fare uno studio di funzione, queste informazioni ci permetteranno di vedere che il grafico della funzione data è di questo tipo:



Osservazione 1.42 Notiamo che, viceversa, se si conosce il grafico di una funzione è possibile stabilire se quella funzione è positiva (o negativa) su un certo insieme e se ha degli zeri.
Ad esempio, il grafico rappresentato qui sotto



interseca l'asse x, nel punto (denotato in figura con un pallino rosso) di coordinate $(x_0, 0)$, ove x_0 è un numero compreso tra -1 e 0. Quindi la corrispondente funzione f ha uno zero in $x = x_0$.

Inoltre, visto che il grafico sta

- sopra l'asse x quando l'ascissa dei suoi punti è $> x_0$
- sotto l'asse x quando l'ascissa dei suoi punti è $< x_0$

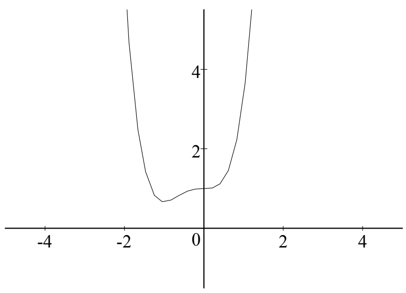
la funzione f è positiva per $x > x_0$ e negativa per $x < x_0$.

Abbiamo così evidenziato uno strumento per lo studio di disequazioni della forma $f(x) \geq 0$ (oppure $f(x) \leq 0$) che può essere utilizzato ogniqualvolta si sappia tracciare, in modo sia pure sommario, il grafico della funzione f.
Come visto nell'esempio, se non siamo in grado di determinare gli zeri in maniera esatta, i risultati saranno puramente indicativi: ciononostante è proprio in questi casi che il metodo si rivela più utile.
In realtà spesso non si è in grado di individuare in modo esatto il segno di una funzione e i suoi eventuali zeri, neppure quando la legge è abbastanza semplice, ad esempio un polinomio (vedi MiniMat, Lezione 3): ma in questo caso si sa studiare la funzione (e in particolare tracciarne il grafico) e quindi si può capire se la funzione ha sempre segno costante sul suo insieme di definizione oppure no ed eventualmente se ha degli zeri.
Premesso che per portare avanti questo programma sarà necessario introdurre altre proprietà delle funzioni (continuità, derivabilità ecc.) illustriamo qui l'idea su un altro esempio.

Esempio 1.43 Supponiamo di voler stabilire quali valori di x verificano la disequazione

$$x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1 > 0.$$

Dopo aver imparato come si studia una funzione, vedremo che la funzione $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1$ ha un grafico di questo tipo



sul quale si legge immediatamente che la funzione è sempre positiva e quindi la disuguaglianza è sempre verificata.