# Argomento 5
# Continuità e teoremi sulle funzioni continue

## I. Continuità

Consideriamo un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ ed una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Per poter dare un senso alla definizione che segue, è necessario che $x_0$, oltre ad essere un punto del dominio di $f$, sia anche un punto di accumulazione per $f$ (cioè, vd. Arg.3, che in ogni intorno di $x_0$ esistano punti del dominio di $f$ diversi da $x_0$). Infatti, ci serve poter parlare sia del valore $f(x_0)$ che del limite di $f$ per $x$ che tende a $x_0$.

**Definizione 5.1** *La funzione $f$ è* **continua nel punto** $x_0$ *se accade che*

$$\boxed{(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

È utile osservare che nella scrittura $(*)$ sono contenute almeno <u>tre</u> informazioni:

**i)** la funzione $f$ è definita nel punto $x_0$, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

**ii)** il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito;

**iii)** inoltre, questo limite e il valore $f(x_0)$ coincidono.

**Esempi:**

**5.2** La funzione $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 0$, perchè $f(0) = 0$, e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

**5.3** La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ non è definita per $x = 0$, e quindi non ha senso chiedersi se è continua in $x_0 = 0$.

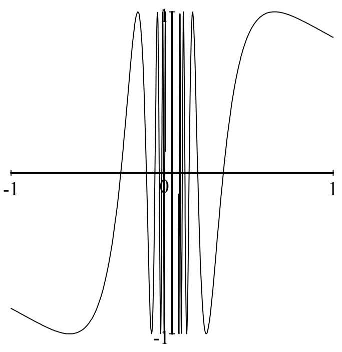
**5.4** La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè $\lim_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ non esiste.

**5.5** La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$, perchè (vd. Arg.4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$.

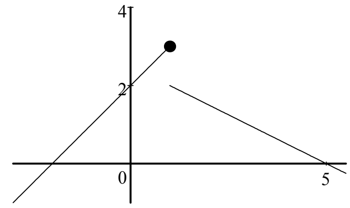
È invece continua in $x_0 = 0$ la funzione $\overline{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ che si ottiene dalla $f$ cambiando il valore $f(0) = 0$ con il valore $\overline{f}(0) = 1$.

**5.6** La funzione $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{5 - x}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 1$, perchè $\lim_{x \to 1} f(x)$ non esiste.

Più precisamente, esistono sia il limite destro che quello sinistro, ma sono diversi tra loro.




Esempio 5.4




Esempio 5.6

# II. Continuità (nei punti di un intervallo)

Nel seguito ci occupiamo solo del caso in cui l'insieme $A$ in cui è definita la funzione $f$ è un <u>intervallo</u>.

**Definizione 5.7** La funzione $f$ è **continua in** $A$ se è continua in ogni punto di $A$ ([1]).

Ad esempio, le funzioni costanti sono palesemente continue in tutti i punti di un qualsiasi intervallo $A$ in cui noi si decida di definirle. È anche semplice vedere che questo vale anche per la funzione $f(x) = x$.
Tutti i punti di un intervallo, tranne eventualmente gli estremi, sono punti interni (vedi Arg.3), cioè sono punti dai quali è possibile spostarsi un poco, sia verso sinistra che verso destra, senza uscire da $A$; equivalentemente, ognuno di questi punti ammette un intorno tutto contenuto in $A$.

**Osservazione 5.9** Quando $x_0$ è un punto <u>interno</u> all'intervallo $A$, le informazioni **ii) e iii)** contenute nella definizione $(*)$ possono essere riformulate con più precisione; se la funzione $f$ è continua in $x_0$ allora:

**i')** la funzione $f$ è definita nel punto $x_0$, altrimenti non si può parlare del valore $f(x_0)$;

**ii')** esistono, sono finiti, e sono uguali tra loro i limiti (unidirezionali) destro $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e sinistro $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$;

**iii')** inoltre, questi due limiti e il valore $f(x_0)$ coincidono, cioè

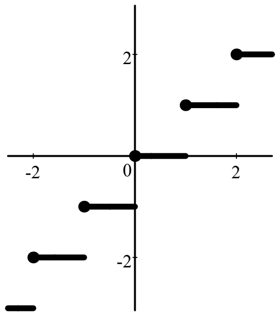
$$(**) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

**Osservazione 5.10** Nel caso in cui il valore $f(x_0)$ coincida con uno dei due limiti unidirezionali, ma non con l'altro (come nell'Esempio 5.6), si usa parlare di continuità unidirezionale. Più precisamente, se accade che $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ , si dice che in $x_0$ la funzione $f$ è **continua da sinistra** (ma non da destra!). Ovviamente, per un punto $x_0$ interno ad $A$ la funzione è continua se e solo se è continua sia da sinistra che da destra.

**Esempio 5.11** La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte intera di $x$) associa ad ogni numero reale $x$ il più grande intero che non supera $x$. Ad esempio, $\lfloor 51.287 \rfloor = 51$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.73 \rfloor = -3$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Se $x_0$ è un numero intero, ad esempio $x_0 = 4$, per $x$ appena più piccolo di 4 la funzione vale 3, mentre per

[1] In questo caso si usa dire che $f$ appartiene alla classe della funzioni continue in $A$, cioè che $f \in \mathcal{C}(A)$.

$x = 4$ e per $x$ appena più grande di 4 abbiamo $f(x) = 4$. Così, $f$ è continua da destra in $x_0 = 4$, ma non da sinistra. Questo discorso può essere ovviamente ripetuto per ogni altro punto a coordinata intera $x = n$, in cui $f(n) = n$. Si ottiene un grafico a gradini, composto da segmenti orizzontali che contengono l'estremo sinistro, ma non quello destro.




Esempio 5.11

**Osservazione 5.12** Quando $x_0$ è un punto estremo appartenente all'intervallo $A$, i punti ii') e iii') dell'Osservazione 5.9 non hanno più senso. In questo caso si potrà parlare solo di limite sinistro (o destro), e quindi le quantità coinvolte in $(**)$ sono solo due, e non tre.
Così, se $A = (a, x_0]$ la funzione $f$ è continua in $x_0$ se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ cioè se, nella notazione dell'Oss.5.10, $f$ è continua da sinistra.

**Esempio 5.13** La funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ è definita in $[-1, 1]$; poichè $f(1) = 0 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, diciamo che $f$ è continua nel punto $x = 1$. Analogamente $f(-1) = 0 = \lim_{x \to -1^+} f(x)$, e quindi $f$ è continua anche in $x = -1$.

**Esempio 5.14** La funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$, ristretta al solo intervallo $[0, 1]$, assume i valori

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Perciò, relativamente a questo intervallo $f$ è continua in $x = 0$, ma non lo è in $x = 1$.

**Osservazione 5.15** Frequentemente si incontrano situazioni in cui una funzione $f$ è definita in un insieme del tipo $A \setminus \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$, cioè nell'intervallo $(a, b)$ privato del punto interno $x_0$. Se esiste, finito, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, è possibile definire, in tutto $A = (a, b)$, una nuova funzione $\overline{f}$ come

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases}.$$

Questa funzione risulta essere continua in $x_0$, e viene detta **prolungamento per continuità** di $f$ in $x_0$. Chiaramente, se $f$ è continua in $A \setminus \{x_0\}$, la funzione $\overline{f}$ è continua in $A$.
Analogamente, se $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ e se esiste, finito, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, possiamo prolungare per continuità la $f$ all'intervallo $(a, x_0]$.

**Esempio 5.16** Le funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ f_3(x) = \frac{\sin x}{x}\ ,\ f_4(x) = \frac{x}{|x|}$$

sono tutte definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, come vedremo più avanti, sono continue in ogni $x \neq 0$. La $f_3$ può essere prolungata per continuità a tutto $\mathbb{R}$, come visto nell'Esempio 5.5. Per le altre questo non è possibile.

# III. Operazioni sulle funzioni continue

La continuità di una funzione $f$ in un punto $x_0$ può essere espressa, in modo elementare, dalla seguente affermazione:

a "piccole" variazioni della variabile $x$ corrispondono "piccole" variazioni dei valori $f(x)$.

Questa affermazione è solo qualitativa, senza pretesa di fornire informazioni sulla relativa grandezza delle variazioni. Nella vita pratica è utilizzata di frequente, dando spesso per scontato di avere a che fare con funzioni continue. Ad esempio, dovendo farci un'idea approssimativa del valore del numero $\sqrt{101}$ tutti noi siamo portati a rispondere che non deve essere molto diverso da $\sqrt{100} = 10$. Il ragionamento, magari inconscio, che facciamo è il seguente: 101 è una "piccola" variazione da 100, e quindi le loro radici quadrate deve essere "vicine". Quel che dà validità a questo discorso è il fatto che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è continua nel punto $x_0 = 100$, come vedremo tra breve.
Così, conoscere un'ampia classe di funzioni ed avere informazioni sulla loro continuità può risultare utile.

♦ Le funzioni elementari più comunemente utilizzate

$$f(x) = x^\alpha\ ,\ f(x) = |x|\ ,\ f(x) = \sin x\ ,\ f(x) = \cos x\ ,\ f(x) = a^x\ ,\ f(x) = \log_a x$$

sono continue nel loro insieme di definizione.

♦ Se $f$ e $g$ sono continue nel punto $x_0$, lo sono anche $f+g$, $f-g$, $fg$, e (pur di avere $g(x_0) \neq 0$) anche $\frac{f}{g}$.

♦ Se $f$ è continua in $x_0$ e $g$ è continua in $y_0 = f(x_0)$, la funzione composta $(g \circ f)$ è continua in $x_0$.

♦ Se $f$ è invertibile nell'intervallo $A$ e continua in $x_0 \in A$, la funzione inversa $f^{-1}$ è continua in $y_0 = f(x_0)$.

**Esempio 5.17** Utilizzando le tre affermazioni precedenti, sono funzioni continue:

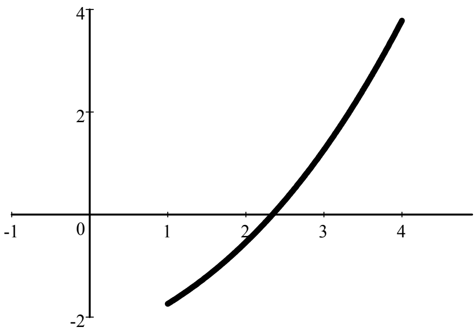
i polinomi in tutto $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan x$ per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $f(x) = \sqrt{7 - x^2}$ per $x \in \left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$.

# IV. Principali teoremi sulle funzioni continue

♦ **Teorema della permanenza del segno** *Se $f$ è definita in un intorno $U$ di $x_0$, se è continua in $x_0$, e se $f(x_0) > 0$, allora esiste un opportuno intorno $V$ di $x_0$, $V \subset U$, in cui $f$ assume solo valori positivi.*

**Osservazione 5.18:** Il teorema dice che non si arriva, in modo continuo, a valori positivi in $x_0$ senza un comportamento "coerente" un po' prima e un po' dopo. Ovviamente vale anche l'enunciato analogo con valori negativi, se $f(x_0) < 0$.

♦ **Teorema degli zeri** *Se $f$ è continua in un intervallo $[a, b]$, ed ha segni discordi in $x = a$ e $x = b$, allora esiste almeno un $x_0 \in (a, b)$ in cui si ha $f(x_0) = 0$.*



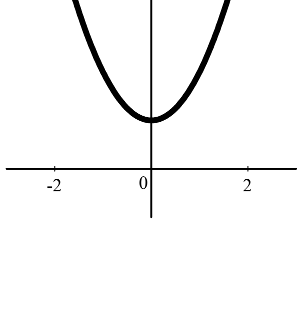

$a = 1$ , $b = 4$ ; $f(a) < 0 < f(b)$

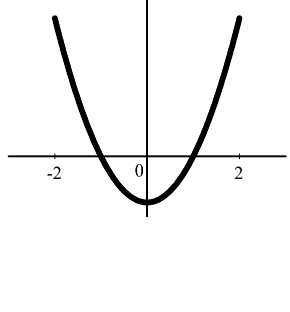
**Osservazioni 5.19:**

**a)** Non è importante sapere quale tra $f(a)$ e $f(b)$ sia positivo, l'importante è che il prodotto $f(a)f(b)$ sia negativo.

**b)** Il teorema non dice quante volte $f$ si annulla in $(a, b)$, dice solo che ciò accade almeno una volta. Ad esempio, la funzione $f(x) = \cos x$ si annulla una sola volta in $(0, \pi)$, ma tre volte in $(0, 3\pi)$.

**c)** Nel caso $f(a)f(b) > 0$, non è possibile affermare nulla sugli eventuali zeri di $f$. Ad esempio, relativamente all'intervallo $[-2, 2]$ la $f(x) = x^2+1$ soddisfa $f(-2)\, f(2) = 25 > 0$, ed $f$ non si annulla mai; invece, relativamente allo stesso intervallo, la $f(x) = x^2 - 1$ soddisfa $f(-2)\, f(2) = 9 > 0$ ma $f$ si annulla due volte.



**Applicazioni 5.20:**

**a)** Utilizzando questo teorema, possiamo garantire che *"Ogni polinomio $f$ di grado dispari si annulla, in $\mathbb{R}$, almeno una volta"*. Infatti, se il termine di grado più alto ha coefficiente positivo si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e quindi esistono certamente un $a < 0$ ed un $b > 0$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. (Nel caso in cui il coefficiente del termine di grado più alto è negativo, basta ragionare sul polinomio $-f$).

**b)** Un'altra conseguenza è: *"Ogni numero $\alpha > 0$ ammette, per ogni intero $n \geq 1$, almeno una radice $n$-sima positiva"*. Infatti, la funzione $f(x) = x^n - \alpha$ ha valore negativo in $x = 0$, e valore positivo per qualche $x$ sufficientemente grande.
Altre considerazioni sulla monotonìa di $f$ permettono in realtà di stabilire che questa radice $n$-sima è unica, denotata con il simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$.

**c)** Un possibile utilizzo del teorema degli zeri è legato al calcolo approssimato degli zeri di una funzione, mediante il cosiddetto "metodo di bisezione", che illustriamo con un esempio.
La funzione $f(x) = 8x^3 + 4x - 2$ si annulla almeno una volta in un punto $x_0 \in (0,1)$, perchè $f(0) = -2 < 0 < 10 = f(1)$. Inoltre, nel punto medio dell'intervallo $(0,1)$ si ha $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$, per cui $0 < x_0 < \frac{1}{2}$. Continuando a valutare $f$ nei punti medi degli intervalli in cui abbiamo "intrappolato" il punto $x_0$ abbiamo: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{8} < 0$, per cui $\frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{64} < 0$, per cui $\frac{3}{8} < x_0 < \frac{1}{2}$; ...

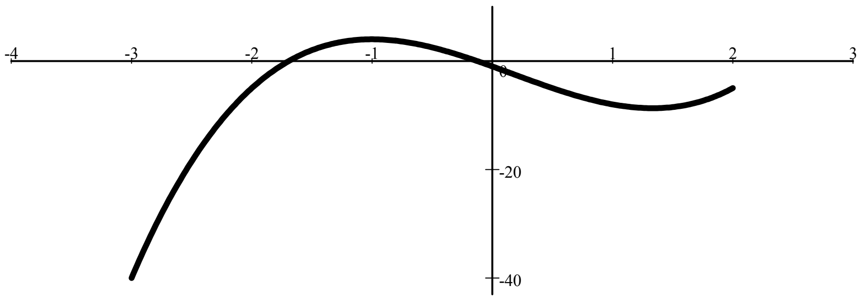
♦ **Teorema di Darboux (o dei valori intermedi)** *Se $f$ è continua in un intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

**Osservazioni 5.21:**

**a)** Attenzione, non si sostiene che $f$ assume solo i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, ma che almeno una volta tutti quei valori vengono assunti. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$, e l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{8\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, e quindi il teorema garantisce che tutti i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ vengono assunti da $f$ quando $x$ percorre l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.
Vale la pena osservare che in questo intervallo la $f$ assume per ben tre volte i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ed assume anche tutti i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e $1$ e tutti quelli compresi tra $-1$ e $-\frac{1}{2}$.

**b)** Una buona traduzione intuitiva di questo teorema può essere *"Una funzione continua in un intervallo non fa salti"*.

♦ **Teorema di Weierstrass** *Se $f$ è continua in un intervallo $[a,b]$, assume massimo e minimo (assoluti) in $[a,b]$.*




$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x - 1;\ \max_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-1) = 4;\ \min_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-3) = -40.$$

**Osservazioni 5.22:**

**a)** Una prima informazione contenuta nella tesi del teorema di Weierstrass è: *"Se $f$ è continua in $[a,b]$, allora è limitata in $[a,b]$"*. In più, oltre ad affermare che $f$ è limitata, il teorema è più preciso, perchè garantisce l'esistenza di almeno due punti $x_0, x_1 \in [a,b]$ per i quali si ha

$$m = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = M \qquad\qquad \forall x \in [a,b].$$

**b)** Per la validità del teorema di Weierstrass è fondamentale che l'intervallo di continuità di $f$ sia chiuso e limitato come mostrato nel seguente

**Esempio 5.23** La funzione $f(x) = x$ è continua e limitata in $(0,1]$, ma non assume minimo.
La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua in $[1,+\infty)$, ammette massimo ma non minimo.
La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua in $(0,1]$, assume minimo, ma non è limitata.
La funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ non è continua in $[0,1]$, ammette minimo ma non massimo.

♦ I teoremi di Weierstrass e Darboux possono essere unificati nel seguente teorema:

*Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra il proprio minimo assoluto ed il proprio massimo assoluto.*

# V. Classificazione delle discontinuità

Un **punto di discontinuità** di $f$ è un punto $x_0$ in cui $f$ è definita, ma non è continua. Alla luce delle osservazioni contenute nel paragrafo II, possiamo dare tre diverse tipologie per questi punti. Per semplicità, ci occupiamo ancora di funzioni definite su intervalli.

♦ **Discontinuità eliminabile:**

**i)** Quando $x_0$ è un punto interno ad $A$, il limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ esiste, è finito, ma è diverso da $f(x_0)$.
Questo significa che se ci avviciniamo ad $x_0$ sia da destra che da sinistra $f$ ammette lo stesso limite, ma in $x_0$ il valore di $f$ è diverso.
L'aggettivo "eliminabile" ci dice che la discontinuità può essere rimossa semplicemente cambiando il valore assunto da $f$ in $x_0$, e ponendolo uguale a quello del limite. È la situazione incontrata nell'Esempio 5.5, dove la discontinuità è stata rimossa costruendo la funzione $\overline{f}$.

**ii)** Sono anche eliminabili quelle discontinuità situate in punti estremi di un intervallo, in cui il limite unilaterale esiste, è finito, ma diverso da $f(x_0)$.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.14, in cui la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$. Cambiando il suo valore in $f(1) = 0$ otteniamo una funzione continua nell'intervallo $[0,1]$.

♦ **Discontinuità di I specie:**

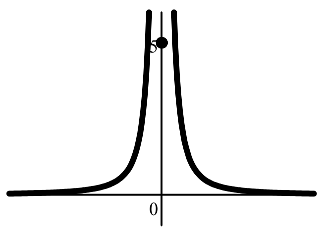
È un punto interno ad $A$, in cui esistono, finiti, i due limiti unidirezionali, ma sono diversi tra loro. In questo caso non c'è possibilità di eliminare la discontinuità. Possiamo solo, come nell'Oss.5.10, eventualmente avere continuità da destra o da sinistra.
È il caso della funzione dell'Esempio 5.6, che ha un punto di discontinuità di I specie in $x = 1$. Per la funzione dell'Esempio 5.11 tutti i punti ad ascissa intera sono discontinuità di I specie.

♦ **Discontinuità di II specie:**

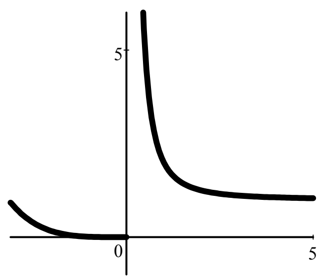
È un punto di $A$ in cui $f$ non è continua, e nessuno dei due casi precedenti si applica. Questo significa che: se il punto è interno ad $A$, almeno uno dei due limiti unidirezionali di $f$ non esiste, oppure esiste ma non è finito; se il punto è un estremo per l'intervallo $A$, l'unico limite unidirezionale calcolabile non esiste, oppure esiste ma non è finito.
Abbiamo incontrato questa situazione nell'Esempio 5.4, dove non esiste nessuno dei due limiti unidirezionali in $x_0 = 0$.
Altri esempi sono:

**Esempio 5.24** La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non ha limite finito per $x \to 0$.

**Esempio 5.25** La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha limite infinito per $x \to 0^+$.




Esempio 5.24




Esempio 5.25