Argomento 1

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 1.18 L'esercizio si risolve più facilmente tracciando il grafico della funzione, che coincide nell'intervallo $(-\infty, 0]$ con un arco di parabola, nell'intervallo $(0, 1]$ con un segmento di retta, nell'intervallo $(1, +\infty)$ con un arco di iperbole equilatera.

ESERCIZIO 1.21 I denominatori devono essere $\neq 0$; le espressioni sotto radice quadrata devono essere ≥ 0; se nella funzione ci sono due frazioni, entrambe devono essere definite e quindi i due denominatori devono essere contemporaneamente $\neq 0$.

ESERCIZIO 1.23 Tracciare i grafici. Per provare che $f(x)$ non è iniettiva si può anche cercare un numero reale k tale che l'equazione $f(x) = k$ abbia più di una soluzione. Ad esempio si ha $x + |2x| = 3$ per $x = 1$ e per $x = -3$: quindi...

SOLUZIONI

Sol. Ex. 1.1

$\left(\sqrt{7} - 3\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{7}\right) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} - 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{7} =$

$$= \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - 3\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{7}\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = -5\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - 15 + 14 = -5\sqrt{35} - 1.$$

Sol. Ex. 1.2

Posto $a = \dfrac{1 + \sqrt{26}}{2}$ e $b = \dfrac{2 + \sqrt{17}}{2}$, risulta $a < b$ poiché

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{26} < 2 + \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{26} < 1 + \sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad 26 < 18 + 2\sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad 4 < \sqrt{17}.$$

Sol. Ex. 1.3

Confrontando via via le cifre delle rappresentazioni decimali, a partire da quelle più a sinistra

$$-3.347 < -3.34\overline{6} < -3.1416 < -\pi = -3.14159\ldots <$$
$$< 0.954 < 0.9541 < \ 0.998 < 1.001 < 1.414\overline{1} < \sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Sol. Ex. 1.4

$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 < x \leq 5\} = (-2, 5]$

$B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -2 \leq x < 0 \text{ oppure } 2 < x < 4\} = [-2, 0) \cup (2, 4)$

$C = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{7}{4} \leq x < 1 \text{ oppure } x > 3\right\} = \left[-\frac{7}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } x \leq -1 \text{ oppure } 2 \leq x < \frac{8}{3}\right\} = (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{8}{3}\right).$

Sol. Ex. 1.5

- $A = (-2, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf A = -2$, $\sup A = \max A = 5$; invece A non ha minimo, poiché $\inf A = -2$ non sta in A.
- $B = [-2, 0) \cup (2, 4)$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf B = \min B = -2$, $\sup B = 4$; invece B non ha massimo, poiché $\sup B = 4$ non sta in B.
- $C = \left[-\frac{7}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$ è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato (e quindi non è limitato); $\inf C = \min C = -\frac{7}{4}$; C non può avere massimo, essendo superiormente illimitato ($\sup C = +\infty$).
- $D = (-\infty, -1] \cup \left[2, \frac{8}{3}\right)$ è superiormente limitato, ma non inferiormente limitato (e quindi non è limitato); $\sup D = \frac{8}{3}$; D non ha massimo, poiché $\sup D = \frac{8}{3}$ non sta in D e non può avere minimo, essendo inferiormente illimitato ($\inf D = -\infty$).

Sol. Ex. 1.6

$A = \left(-\frac{4}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{4}{3} < x \leq 1 \text{ oppure } x > 2\right\}$

$B = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 5] = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ oppure } 1 < x \leq 5\right\}$

$C = \{0\} \cup (4, 5] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tali che } 4 < x \leq 5 \text{ oppure } x = 0\}.$

Sol. Ex. 1.7

- $A = \left(-\frac{4}{3}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ è inferiormente limitato, ma non superiormente limitato (e quindi non è limitato); $\inf A = -\frac{4}{3}$; A non ha minimo, poiché $\inf A = -\frac{4}{3}$ non sta in A non può avere massimo, essendo superiormente illimitato ($\sup A = +\infty$).

- $B = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf B = \min B = -\frac{1}{2}$, $\sup B = \max B = 5$.

- $C = \{0\} \cup (4, 5]$ è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato); $\inf C = \min C = 0$, $\sup C = \max C = 5$.

Sol. Ex. 1.8

- I "primi" cinque elementi di $A = \left\{\frac{2n-3}{n} : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $2 - \frac{3}{1} = -1$, $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{3}{3} = 1$, $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, $2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$. In generale un elemento di A si può riscrivere come $2 - \frac{3}{n}$ e quindi, al crescere di n, diventa sempre "più grande" pur restando < 2. Dunque: A è superiormente e inferiormente limitato (e quindi limitato) e $\inf A = \min A = -1$; $\sup A = 2$ poiché nessun numero più piccolo di 2 è maggiore di tutti gli elementi di A, ma 2 non appartiene ad A e quindi A non ha massimo.

- I "primi" cinque elementi di $B = \left\{\frac{1}{n} - n : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $1 - 1 = 0$, $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$, $\frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$, $\frac{1}{5} - 5 = -\frac{24}{5}$. Al crescere di n l'elemento $\frac{1}{n} - n$ è sempre più vicino a $-n$ e quindi B non è inferiormente limitato ($\inf B = -\infty$); invece B è superiormente limitato e $\sup B = \max B = 0$.

- I "primi" cinque elementi di $C = \left\{(-1)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right) : n = 1, 2, 3, ...\right\}$ sono: $(-1)^1 \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right) = -3$, $(-1)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{2}\right) = 2$, $(-1)^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$, $(-1)^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{2}$, $(-1)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{5}$.

  In generale un elemento di C si può riscrivere come $(-1)^n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)$ e quindi: per valori dispari di n si hanno numeri negativi ma sempre ≥ -3 che si avvicinano sempre più a -1; per valori pari di n si hanno numeri positivi ma sempre ≤ 2 che si avvicinano sempre più a 1. Dunque C è superiormente e inferiormente limitat o (e quindi limitato) e $\inf C = \min C = -3$; $\sup C = \max C = 2$.

Sol. Ex. 1.9

- Il generico elemento $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{n}$ di A, al crescere di n, diventa sempre "più piccolo" pur restando $>\dfrac{1}{4}$. Dunque: A è superiormente e inferiormente limitato e $\sup A=\max A=\dfrac{13}{4}$; $\inf A=\dfrac{1}{4}$ poiché nessun numero più grande di $\dfrac{1}{4}$ è minore di tutti gli elementi di A, ma $\dfrac{1}{4}$ non appartiene ad A e quindi A non ha minimo.

- Il generico elemento $\dfrac{-2-n}{n+1}=-1-\dfrac{1}{n+1}$ di B, al crescere di n, diventa sempre "più grande" pur restando <-1. Dunque: B è superiormente e inferiormente limitato e $\inf B=\min B=-\dfrac{3}{2}$; $\sup B=-1$ poiché nessun numero più piccolo di -1 è maggiore di tutti gli elementi di B, ma -1 non appartiene a B e quindi B non ha massimo.

- I "primi" elementi di $C=\left\{n+\dfrac{3}{n}\,:\,n=1,2,3,...\right\}$ sono: $c_1=1+3=4$, $c_2=2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$, $c_3=3+\dfrac{3}{3}=4>c_2$, $c_4=4+\dfrac{3}{4}>c_3$, $c_5=5+\dfrac{3}{5}>c_4$ ecc. e quindi non c'è nessun elemento di C minore di c_2. Al crescere di n il generico elemento $n+\dfrac{3}{n}$ è sempre più vicino a n e quindi C non è superiormente limitato ($\sup C=+\infty$); invece C è inferiormente limitato e $\inf C=\min C=\dfrac{7}{2}$.

Sol. Ex. 1.10 $\sup A=2^{2-1}=2$; $\inf A=0$. Infatti il generico elemento $2^{2-n}=\dfrac{4}{2^n}$ di A, al crescere di n, diventa sempre "più piccolo" ma resta >0.

Sol. Ex. 1.11

a) $f(0)=0^4-4\cdot 0+1=1$.
b) -2.
c) 9.

Sol. Ex. 1.12

a) $f(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)-1=-3$: quindi $(-1,3)$ non appartiene al grafico.
Anche il punto in **b)** non appartiene al grafico, mentre quelli in **c), d)** appartengono al grafico.

Sol. Ex. 1.13

I disegni (A) e (C) possono rappresentare il grafico di una funzione poiché comunque si prenda a in $[-4, 4]$ c'è (uno e) un solo punto del grafico che ha ascissa a. Invece:

- nel disegno (B) ogni retta di equazione $x = a$ con $a \in (-4, 4]$ interseca il grafico in due punti distinti;
- nel disegno (D) ogni retta di equazione $x = a$ con $a \in (-4, 4)$ interseca il grafico in due punti distinti;
- nel disegno (E) le rette di equazione $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$ hanno in comune con il grafico infiniti punti.

Quindi (B), (D) ed (E) non rappresentano grafici di funzioni.

Sol. Ex. 1.14

a) $f(1) = -2$.
b) Contando le intersezioni del grafico con $y = -2$, si vede che i punti in cui $f(x) = f(1)$ sono 3.

Sol. Ex. 1.15

a) Sì: risolvendo l'equazione di 2° grado $3x^2 - 4x = -1$ si trovano i numeri reali $x = 1$ e $x = \frac{1}{3}$.
b) Sì: $x = \frac{2}{3}$.
c) No: l'equazione di 2° grado $3x^2 - 4x = -2$ non ha soluzioni reali.

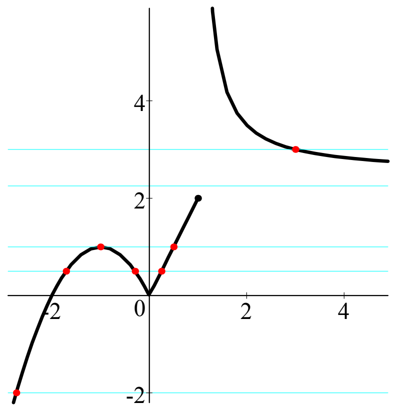
Sol. Ex. 1.16

a) $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$.
b) No.

Sol. Ex. 1.17 Notare che la funzione è definita per $x \neq -\frac{3}{2}$.

a) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = \frac{1}{3}$ si trovano i due numeri reali $x = 0$ e $x = -\frac{2}{3}$, cioè il valore viene assunto due volte.
b) No: dove la funzione è definita, l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = 1$ equivale a $x^2 + 2x + 2 = 0$ che non ha soluzioni reali.
c) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = -\frac{8}{9}$, si trovano i due numeri reali $x = 3$ e $x = -\frac{11}{9}$, cioè il valore viene assunto due volte.
d) Sì: risolvendo l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = 0$, si trovano i due numeri reali $x = 1$ e $x = -1$, cioè il valore viene assunto due volte.
e) No: dove la funzione è definita, l'equazione $\frac{1 - x^2}{2x + 3} = \frac{5}{3}$ equivale a $3x^2 + 10x + 12 = 0$ che non ha soluzioni reali.

Sol. Ex. 1.18 La funzione ha il seguente grafico:



Visto che le rette $y = -2$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = \frac{9}{4}$, $y = 3$ hanno con il grafico rispettivamente 1, 3, 2, nessuna e 1 intersezione,

il valore:	-2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{4}$	3
viene assunto:	1 volta	3 volte	2 volte	mai	1 volta

Si sconsiglia di risolvere l'esercizio attraverso le equazioni (come fatto nel'esercizio precedente), poiché si va incontro a una casistica delicata e noiosa, che riportiamo in nota, solo per permettere a chi avesse seguito questa via di verificare la correttezza dei passaggi fatti [1].

---

[1] Innanzitutto osservare che

- nell'intervallo $(-\infty, 0]$ si ha $f(x) \leq 1$
- nell'intervallo $(0, 1]$ si ha $0 < f(x) \leq 2$
- nell'intervallo $(1, +\infty)$ si ha $f(x) > \frac{5}{2}$.

Quindi

a) il valore negativo -2 può essere assunto solo nell'intervallo $(-\infty, 0]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = -2$ si trova una sola soluzione appartenente all'intervallo: $x = -1 - \sqrt{3}$; quindi il valore viene assunto una volta;

b) il valore $\frac{1}{2}$ può essere assunto nell'intervallo $(-\infty, 0]$, ma anche nell'intervallo $(0, 1]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = \frac{1}{2}$ si trovano <u>due</u> soluzioni appartenenti all'intervallo $(-\infty, 0]$: $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; risolvendo l'equazione $2x = \frac{1}{2}$ si trova <u>una</u> soluzione appartenente all'intervallo $(0, 1]$: $x = \frac{1}{4}$; quindi il valore viene assunto 3 volte;

c) il valore 1 può essere assunto nell'intervallo $(-\infty, 0]$, ma anche nell'intervallo $(0, 1]$. Risolvendo l'equazione $-x^2 - 2x = 1$ si trovano <u>una</u> soluzione appartenenti all'intervallo $(-\infty, 0]$: $x = -1$; risolvendo l'equazione $2x = 1$ si trova <u>una</u> soluzione appartenente all'intervallo $(0, 1]$: $x = \frac{1}{2}$; quindi il valore viene assunto 2 volte;

d) il valore $\frac{9}{4}$ non è assunto in alcun intervallo;

e) il valore 3 può essere assunto solo nell'intervallo $(1, +\infty)$. Risolvendo l'equazione $\frac{5}{2} + \frac{1}{x-1} = 3$, si trova una sola soluzione appartenente all'intervallo: $x = 3$; quindi il valore viene assunto una volta.

Sol. Ex. 1.19

a) Sostituendo si trova $\sqrt{\dfrac{3\,(-4)+10}{4-(-4)}}$: radicando negativo, quindi $f\,(x)$ non è definita in $x=-4$.

b) $f\,(x)$ è definita in $x=2$ e vale $\sqrt{8}$.

c) Sostituendo si trova $\sqrt{\dfrac{3\cdot(4)+10}{4-(4)}}$: denominatore nullo, quindi $f\,(x)$ non è definita in $x=4$.

d) $f\,(x)$ è definita in $x=-\dfrac{10}{3}$ e vale 0.

Sol. Ex. 1.20

C): il denominatore è ≥ 1 e quindi è sempre $\neq 0$.

Sol. Ex. 1.21

a) $\mathbb{R}$ **b)** $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ **c)** $\mathbb{R}$
d) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ **e)** $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$ **f)** $\mathbb{R}$
g) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ **h)** $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Sol. Ex. 1.22

b, d, f sono grafici di funzioni iniettive.
a, c, e sono grafici di funzioni non iniettive.

Sol. Ex. 1.23

a, c, d, f sono funzioni iniettive.

Sol. Ex. 1.24

B)

Sol. Ex. 1.25

C)

Sol. Ex. 1.26

$(g\circ f)\,(x)=\left(\dfrac{x-2}{2-x^3}+1\right)^2=x^2\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^3-2\right)^2}$. Definita in: $\left(-\infty,\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Sol. Ex. 1.27

$(g\circ f)\,(x)=\sqrt{\left(-\sqrt{x}\right)^3}=\sqrt{-\sqrt{x^3}}$. Insieme di definizione: $\{0\}$.

$(f\circ g)\,(x)=-\sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)}=-\sqrt[4]{x^3}$ Insieme di definizione: $[0,+\infty)$.

$(f\circ f)\,(x)=-\sqrt{\left(-\sqrt{x}\right)}$. Insieme di definizione: $\{0\}$.

$(g\circ g)\,(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)^3}=\sqrt[4]{x^9}$. Insieme di definizione: $[0,+\infty)$.

Sol. Ex. 1.28

$(g\circ f)(x) = \dfrac{2}{(x^3-1)+1} = \dfrac{2}{x^3}$. Insieme di definizione: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$(f\circ g)(x) = \left(\dfrac{2}{x+1}\right)^3 - 1 = -\dfrac{x^3+3x^2+3x-7}{(x+1)^3}$. Definita in: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$(f\circ f)(x) = (x^3-1)^3 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 2$. Definita in: $\mathbb{R}$.

$(g\circ g)(x) = \dfrac{2}{\left(\frac{2}{x+1}\right)+1}$: questa funzione è definita in $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$, poiché il suo denominatore deve essere definito, oltre ad essere $\neq 0$. La funzione, $2\cdot\dfrac{x+1}{x+3}$, che si ottiene semplificando è invece definita in $x=-1$: quindi non coincide con $(g\circ g)(x)$.

Sol. Ex. 1.29

$(g\circ f)\ (x) = \dfrac{2}{5+1} = \dfrac{1}{3}$ e $(f\circ g)(x) = 5$. Più in generale, se $f(x)$ è una funzione costante e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una qualunque altra funzione, le funzioni $g\circ f$ e $f\circ g$ sono costanti.

Sol. Ex. 1.30

a) $(g\circ f)(2) = g(2^5 - 2\cdot 2^3 + 2^2) = g(20) = 1 - 20^2 = -399.$

b) $(f\circ g)(2) = f(1-2^2) = f(-3) = \frac{1}{(-3)-2} = -\frac{1}{5}.$

c) $$(g\circ f)(x) = \begin{cases} 1-(x^5-2x^3+x^2)^2 & \text{se } x\geq 0 \\ 1-\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1-x^{10}+4x^8-2x^7-4x^6+4x^5-x^4 & \text{se } x\geq 0 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} & \text{se } x<0 \end{cases}.$$

d) $$(f\circ g)(x) = \begin{cases} (1-x^2)^5 - 2(1-x^2)^3 + (1-x^2)^2 & \text{se } 1-x^2\geq 0 \\ \dfrac{1}{(1-x^2)-2} & \text{se } 1-x^2<0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -x^2(1-x^2)^2(1-3x^2+x^4) & \text{se } -1\leq x\leq 1 \\ -\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x<-1 \text{ o } x>1 \end{cases}.$$

Sol. Ex. 1.31

$f(x) = f(3-2x)$ se e solo se $x^2-x-1 = (3-2x)^2-(3-2x)-1$, cioè $\left[(3-2x)^2-x^2\right]-\left[(3-2x)-x\right]=0$, cioè per $x=1$ e per $x=2$.

Sol. Ex. 1.32

$f(x) = f(1-x)+2$ se e solo se $x^2-x-1 = (1-x)^2-(1-x)-1+2$ cioè $x^2-x-1 = 1-x+x^2$, cioè per nessun valore di x.

Sol. Ex. 1.33

$f(1-x) = f(1+x)$ se e solo se $3(1-x)^2 - 6(1-x) - 1 = 3(1+x)^2 - 6(1+x) - 1$, cioè per ogni x reale.

Sol. Ex. 1.34

a) $f(x) = x^2 - 1$ si scompone così: $\quad x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{(\,)-1} x^2 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ si scompone così: $\quad x \xrightarrow{(\,)^2} x^2 \xrightarrow{(\,)-1} x^2 - 1 \xrightarrow{1/(\,)} \dfrac{1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ si scompone così: $\quad x \xrightarrow{(\,)-1} x - 1 \xrightarrow{(\,)^2} (x-1)^2 \xrightarrow{1/(\,)} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x-2}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2 + 3(\,)} x^2 + 3x \xrightarrow{(\,)-2} x^2 + 3x - 2 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{x^2+3x-2}$$

e) $f(x) = \sqrt{2-x}$ si scompone così: $\quad x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{2+(\,)} 2 - x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{2-x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}-1}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{-(\,)} -x \xrightarrow{2+(\,)} 2 - x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{2-x} \xrightarrow{(\,)-1} \sqrt{2-x} - 1 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{\sqrt{2-x}-1}$$

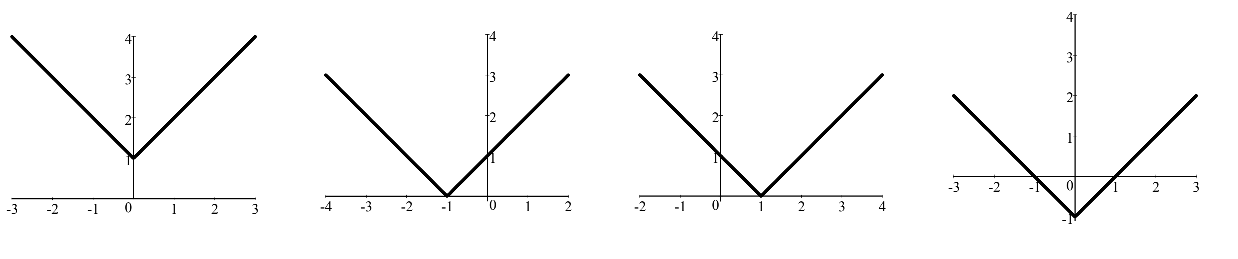
g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2-x}+2}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2 - (\,)} x^2 - x \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{x^2-x} \xrightarrow{(\,)+2} \sqrt{x^2-x} + 2 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}+2} \xrightarrow{3\cdot(\,)} \frac{3}{\sqrt{x^2-x}+2}$$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x^2-x+1}}$ si scompone così:

$$x \xrightarrow{(\,)^2 - (\,)} x^2 - x \xrightarrow{(\,)+1} x^2 - x + 1 \xrightarrow{1/(\,)} \frac{1}{x^2-x+1} \xrightarrow{2\cdot(\,)} \frac{2}{x^2-x+1} \xrightarrow{\sqrt{(\,)}} \sqrt{\frac{2}{x^2-x+1}}$$

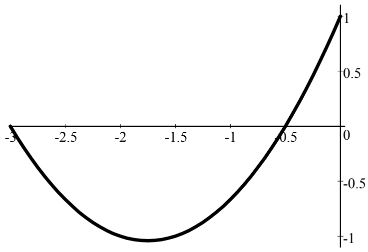
Sol. Ex. 1.35



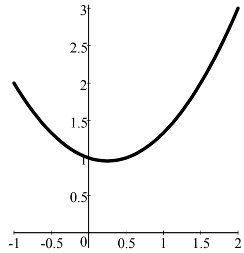
(a) (b) (c) (d)

Sol. Ex. 1.36

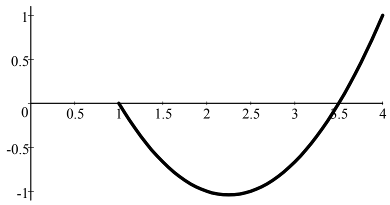
Gli insiemi di definizione richiesti si leggono sui grafici.



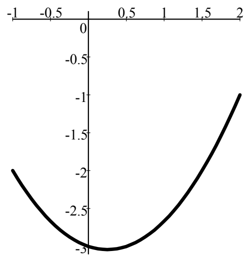
(a)



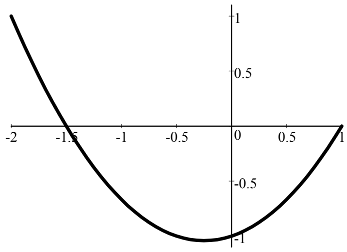
(b)



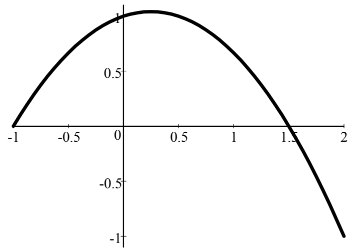
(c)



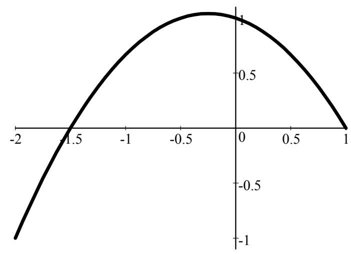
(d)



(e)

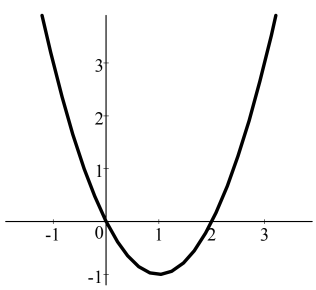


(f)

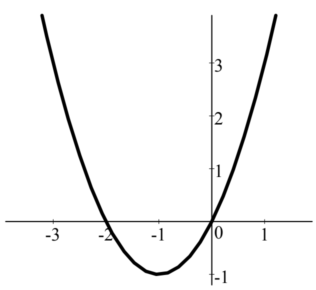


(g)

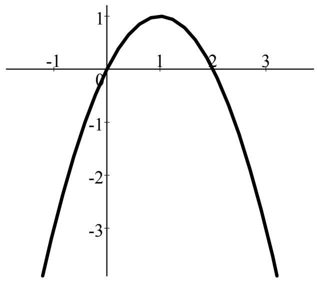
Sol. Ex. 1.37



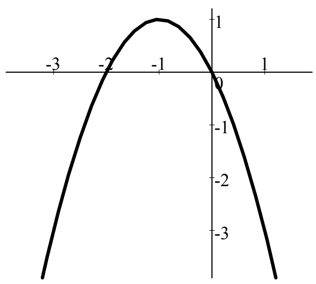
$f(x) = x^2 - 2x$



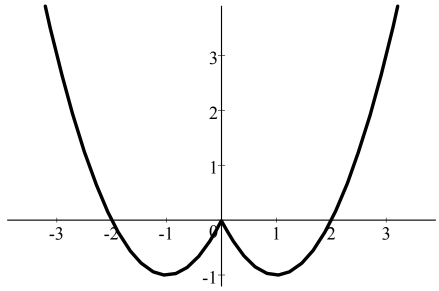
$f(-x) = x^2 + 2x$



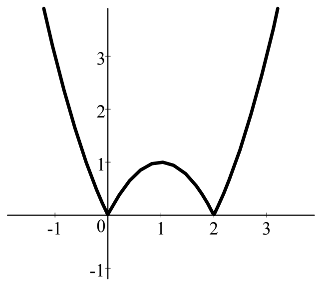
$-f(x) = 2x - x^2$



$-f(-x) = -x^2 - 2x$



$f(|x|) = x^2 - 2|x|$



$|f(x)| = |x^2 - 2x|$

Sol. Ex. 1.38

C): infatti risolvendo $y = \dfrac{3x-1}{2x}$ come equazione in x si trova $(2y-3)\,x = -1$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{3-2y}$; ora basta cambiare in x il nome della variabile indipendente.

Sol. Ex. 1.39

Risolvendo $y = 1 + \dfrac{1}{2x}$ come equazione in x si trova $2x\,(y-1) = 1$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{1}{2\,(y-1)}$; cambiando in x il nome della variabile indipendente: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2\,(x-1)}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Sol. Ex. 1.40

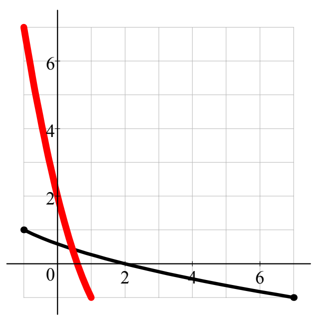
Risolvendo $y = 2 - \dfrac{3}{x}$ come equazione in x si trova $x\,(y-2) = -3$, e quindi $f^{-1}(y) = x = \dfrac{3}{2-y}$; cambiando in x il nome della variabile indipendente: $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2-x}$. Il suo insieme di definizione è $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Sol. Ex. 1.41

B)

Sol. Ex. 1.42

La funzione data, f, definita in $[-1, 7]$, ha inversa, poiché è monotona strettamente decrescente.
Il grafico di f^{-1} è rappresentato con il tratto più spesso.



Sol. Ex. 1.43

a) f è definita in $[-3, 0] \cup [1, 3]$;
b) f è crescente in $[-3, -1]$;
c) f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $[1, 3]$;
d) f è concava in $(-3, 0)$;
e) f è convessa in $(1, 3)$;
f) f ha massimo M nel suo insieme di definizione: $M = 3$. Il punto di massimo è $x = -1$;
g) f ha minimo m nel suo insieme di definizione: $m = -2/3$. Il punto di minimo è $x = 3$.

Sol. Ex. 1.44

a) f è definita in $[-3, 0] \cup (0, 3] = [-3, 3]$;
b) f è crescente in $[-3, -1]$;
c) f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $(0, 3]$. Notare che non è decrescente su $[-1, 3]$.
d) f è concava in $(-3, 0)$;
e) f è convessa in $(0, 3)$;
f) f non ha massimo M nel suo insieme di definizione, poiché $\sup f = +\infty$;
g) f ha minimo m nel suo insieme di definizione: $m = -2/3$. Il punto di minimo è $x = 3$.

Sol. Ex. 1.45

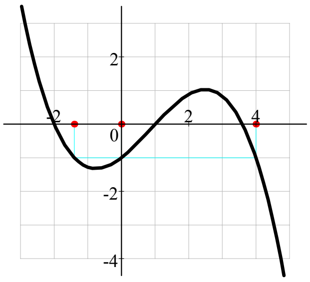
Corrette: **(A)** e **(D)**.
False: **(B)** e **(C)**: entrambi gli intervalli contengono l'intervallo $(0, 2)$ in cui si verifica un cambio di concavità.

Sol. Ex. 1.46

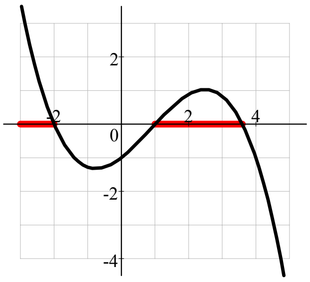
A) vera;
B) falsa: f è decrescente in ciascuno dei due intervalli $(-3, -2)$ e $(1, 3)$ ma non sulla loro unione (ad esempio: $f(-5/2) < 0 < f(2)$);
C) vera: $(1, 2)$ è contenuto in $(1, 3)$, insieme su cui abbiamo già detto che la funzione è crescente;
D) falsa: f assume lo stesso valore in corrispondenza a valori diversi della variabile indipendente (ad esempio: $f(-3) = f(-1)$) e quindi non è iniettiva;
E) vera: in $(-2, 1)$ la funzione è monotona strettamente crescente;
F) falsa: f è limitata, ma il suo valore massimo è 3;
G) vera.

Sol. Ex. 1.47

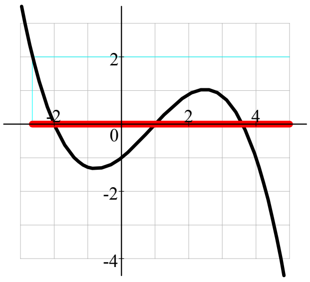
Le soluzioni sono riportate, sulle tre figure, con il tratto (o il punto) più spesso.



x tali che $f(x) = -1$



x tali che $f(x) > 0$



x tali che $f(x) < 2$