LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - MarcoVignati

Calcolo differenziale #2

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame.
Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

1] Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) := \ln\left(14y - 12x + 2xy - 3x^2 - 2y^2\right)$$

e classificarne la natura (max, min, sella).

Sol.: La funzione è definita (e di certo infinitamente differenziabile) nel suo dominio naturale

$$\Omega := \left\{(x,y) : 14y - 12x + 2xy - 3x^2 - 2y^2 > 0\right\}$$

(è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$). Inoltre, $f = \ln(g)$, e poiché la funzione logaritmo è strettamente monotona crescente possiamo limitarci a studiare la natura dei punti stazionari, in Ω, di $g(x,y) := 14y - 12x + 2xy - 3x^2 - 2y^2$. Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f = \mathbf{0} \;&\Leftrightarrow\; \nabla g = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (2y - 6x - 12; 2x - 4y + 14) = (0;0) \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (-1,3) \in \Omega \end{aligned}$$

Poi: $\mathbf{H}g(-1,3) = \begin{matrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{matrix}$, $\det \mathbf{H}g(-1,3) = 20 > 0$, $\partial_{xx} g(-1,3) < 0$, e quindi l'unico punto stazionario per f è $(-1,3)$, punto di max relativo.

2] Sia

$$F(x,y) = 2x^2y + \ln(x+1) + 2 - e^{x+y}$$

e sia y_0 la soluzione di $F(0,y) = 0$.

i) Verificare che, localmente in $(0, y_0)$, l'insieme Z in cui F si annulla può essere descritto come grafico di una funzione $y = g(x)$.

ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(0, y_0)$.

Sol.: la funzione F è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio naturale, l'aperto $\Omega = (-1, +\infty) \times \mathbb{R}$.

L'equazione $0 = F(0,y) = 2 - e^y$ è soddisfatta per $y = y_0 = \ln 2$.

Inoltre $\partial_y F(x,y) = 2x^2 - e^{x+y}$, e $\partial_y F(0, \ln 2) = -2 \neq 0$.

Cosí, nel punto $(0, \ln 2)$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini.

L'insieme Z, luogo degli zeri di F, può essere descritto, localmente in $(0, \ln 2)$, come grafico di un'unica funzione $y = g(x)$.

Sempre il teorema di Dini assicura che g è infinitamente derivabile in un intorno U di $x = 0$, e che

$$g'(x) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F}(x, g(x)) = -\frac{4xg(x) + \dfrac{1}{x+1} - e^{x+g(x)}}{2x^2 - e^{x+g(x)}}$$

Perciò $g(0) = \ln 2$, e $g'(0) = -1/2$.

La retta cercata ha quindi equazione

$$\begin{aligned} y &= g(0) + xg'(0) = \\ &= \ln 2 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$