LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - MarcoVignati

Campi vettoriali #1

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame. Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

1] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \, ; \, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

lungo la poligonale aperta γ che congiunge, nell'ordine, $(-1,0)\,,(-1,2)\,,(4,2)$ **e** $(4,0)\,.$

<u>Sol.</u>: il campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ è definito, e di classe $\mathcal{C}^\infty$, nell'aperto $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$
Ci sono diverse strade per arrivare al risultato.
i) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo in Ω; infatti, si osserva facilmente che per $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ si ha $\nabla U = \mathbf{F}$, e quindi U è un potenziale per $\mathbf{F}$. Perciò

$$U(4,0) - U(-1,0) = \frac{1}{2}\ln 16 - \frac{1}{2}\ln 1 = \ln 4$$

è il lavoro compiuto da F lungo γ.

ii) Se invece, in partenza, non si "vede" che $\mathbf{F}$ è conservativo?
La verifica dell'irrotazionalità di $\mathbf{F}$ nell'aperto Ω è semplice, basta calcolare $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ e notare che coincidono. Questo non permette di affermare che $\mathbf{F}$ è conservativo in Ω, perché Ω non è semplicemente connesso. Tuttavia la curva γ è contenuta nell'insieme aperto B, ottenuto sottraendo da $\mathbb{R}^2$ il semiasse delle ordinate negative $\{(0,y) : y \le 0\}$; l'insieme B è stellato e quindi, grazie al Lemma di Poincaré, possiamo affermare che $\mathbf{F}$ è conservativo in B. Poi, come prima, trovare un potenziale per $\mathbf{F}$ è immediato.

iii) In alternativa, calcoliamo il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ usando la definizione. I tre segmenti che compongono γ si possono parametrizzare mediante le curve:

$$\mathbf{p}(t) = (-1;t)\,,\ t : 0 \mapsto 2; \quad \mathbf{q}(t) = (t,2)\,,\ t : -1 \mapsto 4; \quad \mathbf{r}(t) = (4,t)\,,\ t : 2 \mapsto 0$$

e quindi il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ si ottiene come

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) \bullet \mathbf{p}'(t)\ dt + \int_{-1}^4 \mathbf{F}(\mathbf{q}(t)) \bullet \mathbf{q}'(t)\ dt + \int_2^0 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\ dt = \\
&= \int_0^2 \mathbf{F}(-1,t) \bullet (0,1)\ dt + \int_{-1}^4 \mathbf{F}(t,2) \bullet (1,0)\ dt - \int_0^2 \mathbf{F}(4,t) \bullet (0,1)\ dt = \\
&= \int_0^2 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{-1}^4 \frac{t}{t^2+4} dt - \int_0^2 \frac{t}{16+t^2} dt = \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=2} + \frac{1}{2}\ln\left(4+t^2\right)\Big|_{t=-1}^{t=4} - \frac{1}{2}\ln\left(16+t^2\right)\Big|_{t=0}^{t=2} = \ln 4\,.
\end{aligned}$$

2] Discutere, al variare di $b \in \mathbb{R}$, chiusura ed esattezza del campo vettoriale

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) = & \left[2e^{2x-z} + 3y^2 + by + z - 2x + 4x\left(x^2+y^2\right)\right]\mathbf{i} + \left[4y\left(x^2+y^2\right) - bz + x(6y-1)\right]\mathbf{j} \\ & - \left[e^{2x-z} + 12z^3 - b^2x - y\right]\mathbf{k}\end{aligned}$$

nella regione

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\right\}$$

Sol.: Calcolate le derivate parziali $\partial_{x_j} F_i$, troviamo che $\mathbf{F}$ è irrotazionale in Ω se e solo se $\boxed{b=-1}$. La regione Ω è una corona sferica, quindi semplicemente connessa in $\mathbb{R}^3$, perciò $\mathbf{F}$ è conservativo in Ω. Per trovarne i potenziali U :

$$\begin{aligned}U(x,y,z) &= \int \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)\,dz = \int F_3(x,y,z)\,dz \\ &= \int (-e^{2x-z} - 12z^3 + x + y)dz = (x+y)z - 3z^4 + e^{2x-z} + g(x,y)\end{aligned}$$

da cui

$$F_2 = 4y\left(x^2+y^2\right) + z + x(6y-1) = \partial_y U = z + \partial_y g(x,y)$$

quindi

$$\begin{aligned}g(x,y) &= \int \partial_y g(x,y)\ dy = \int [4y\left(x^2+y^2\right) + x(6y-1)]dy \\ &= 2x^2y^2 + y^4 + 3xy^2 - xy + h(x)\end{aligned}$$

Perciò

$$U(x,y,z) = (x+y)z - 3z^4 + e^{2x-z} + 2x^2y^2 + y^4 + 3xy^2 - xy + h(x)$$

da cui

$$\begin{aligned}F_1 &= 2e^{2x-z} + 3y^2 - y + z - 2x + 4x\left(x^2+y^2\right) = \partial_x U \\ &= z + 2e^{2x-z} + 4xy^3 + 3y^2 - y + h'(x)\end{aligned}$$

quindi

$$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int \left(4x^3 - 2x\right)dx = x^4 - x^2 + c$$

Ne segue che tutti e soli i potenziali di $\mathbf{F}$ in Ω hanno la forma

$$U(x,y,z) = (x+y)z - 3z^4 + e^{2x-z} + 2x^2y^2 + y^4 + 3xy^2 - xy + x^4 - x^2 + c,\quad c \in \mathbb{R}.$$