Equazioni differenziali #3

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame. Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

1] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{xz^2}{(x^2+y^2)^2} ; \frac{yz^2}{(x^2+y^2)^2} ; \frac{-z}{x^2+y^2} \right)$$

lungo l'arco elicoidale di equazione parametrica

$$\mathbf{p}(t) = (\cos t; \sin t; t) \qquad t : 0 \longmapsto 4\pi$$

Sol.: Propongo due strade diverse.
i) Il campo $\mathbf{F}$ è definito nell'insieme $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$. In questo insieme $\mathbf{F} = \nabla U$, dove

$$U(x,y,z) := -\frac{z^2}{2(x^2+y^2)}$$

e quindi

$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{p} = U(\mathbf{p}(4\pi)) - U(\mathbf{p}(0)) = U(1,0,4\pi) - U(1,0,0) = -8\pi^2 .$$

ii) In modo diretto

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{p} = \int_0^{4\pi} \left(t^2 \cos t; t^2 \sin t; -t\right) \bullet (-\sin t; \cos t; 1)\ dt \\ &= \int_0^{4\pi} (-t)\, dt = -8\pi^2 . \end{aligned}$$

2] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,;\,\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ lungo l'arco di spirale logaritmica di equazione (in coordinate polari) $\left\{\rho(\vartheta) = e^{-\vartheta}\right\}$, nel tratto che congiunge il punto $P = \left(e^{2\pi}, 0\right)$ al punto $Q = \left(e^{-2\pi}, 0\right)$.

Sol.: In modo esplicito, usiamo la parametrizzazione cartesiana

$$\mathbf{p}(\vartheta) = (x(\vartheta)\,; y(\vartheta)) = (\rho(\vartheta)\cos\vartheta; \rho(\vartheta)\sin\vartheta) = \left(e^{-\vartheta}\cos\vartheta; e^{-\vartheta}\sin\vartheta\right)$$

con il parametro "angolo" ϑ che percorre in senso crescente l'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ mentre il punto $\mathbf{p}(\vartheta)$ percorre in senso antiorario l'arco di spirale che si avvolge verso l'origine. Quindi

$$\mathbf{p}'(\vartheta) = \left(x'(\vartheta)\,; y'(\vartheta)\right) = \left(e^{-\vartheta}\left[-\cos\vartheta - \sin\vartheta\right]; e^{-\vartheta}\left[\cos\vartheta - \sin\vartheta\right]\right)$$

e

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{p} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{x(\vartheta)}{x^2(\vartheta)+y^2(\vartheta)}; \frac{y(\vartheta)}{x^2(\vartheta)+y^2(\vartheta)}\right) \bullet \left(x'(\vartheta)\,; y'(\vartheta)\right)\, d\vartheta \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{2\vartheta}e^{-\vartheta}(\cos\vartheta; \sin\vartheta) \bullet e^{-\vartheta}(-\cos\vartheta - \sin\vartheta; \cos\vartheta - \sin\vartheta)\, d\vartheta \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} (-1)\, d\vartheta = -4\pi \end{aligned}$$

Alternativamente, osserviamo che nell'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ il campo $\mathbf{F}$ è gradiente della funzione

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

per cui

$$W = \int_\gamma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{p} = U(Q) - U(P) = \ln\|Q\| - \ln\|P\| = -4\pi.$$