LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - MarcoVignati

Equazioni differenziali #2

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame.
Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

1] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e stabilire in quale intervallo I è definita

$$\begin{cases} y' = -y^2 \ln t \\ y(1/e) = e/(e-2) \end{cases}$$

Sol.: Eq. differenziale del I ordine, in forma normale $y' = f(t, y)$, con f di classe $\mathcal{C}^1$ in $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

In ogni punto di Ω sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale , e quindi il $(P.C.)$ ammette un'unica soluzione massimale definita in un intorno I di $t = 1/e$.

Quest'unica soluzione può essere trovata osservando che, localmente, si ha $y \neq 0$; questo fatto permette di separare le variabili

$$-\frac{y'}{y^2} = \ln t \; ; \quad \left(\frac{1}{y}\right)' = (t(\ln t - 1))' \; ; \quad \frac{1}{y(t)} - \frac{e-2}{e} = t(\ln t - 1) + \frac{2}{e}$$

da cui si ricava che la soluzione locale è

$$y(t) = \frac{1}{1 + t(\ln t - 1)} .$$

Questa funzione è definita per tutti i valori di t che non annullano il Denominatore, cioè per $t \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Tuttavia, poiché $0 < \frac{1}{e} < 1$, solo in $I = (0, 1)$ rappresenta la soluzione del $(P.C.)$.

Infatti, per $t \to 1^-$ la soluzione diverge a $+\infty$, e non può essere raccordata con il ramo che "vive" in $(1, +\infty)$.

2] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e stabilire in quale intervallo I è definita

$$\begin{cases} y' = (\tan t)\, y + t \\ y\,(0) = 2 \end{cases}$$

Sol.: l'equazione differenziale è lineare, del I ordine, con coefficienti continui in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dalla teoria sappiamo che il $(P.C.)$ ammette un'unica soluzione, definita per ogni t in questo intervallo. Perciò, $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

La soluzione può essere determinata esplicitamente con la solita formula

$$\begin{aligned} y\,(t) &= \exp\left(\int_0^t \tan s\, ds\right)\left\{2 + \int_0^t s\, \exp\left(-\int_0^s \tan u\, du\right) ds\right\} \\ &= \exp\left(-\ln|\cos s|\right)\Big|_{s=0}^{s=t} \left\{2 + \int_0^t s\, \exp\left(\ln|\cos u|\right)\Big|_{u=0}^{u=s} ds\right\} \\ &= \frac{1}{\cos t}\left\{2 + \int_0^t s\, \cos s\, ds\right\} = ... \\ &= ... = 1 + \frac{1 + t\sin t}{\cos t} \end{aligned}$$