LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - MarcoVignati

Integrali multipli #2

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame.
Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

1] Calcolare il volume della regione $E \subset R^3$ giacente nel semi-spazio $\{z \geq 1\}$, e contenuta nel cilindro $\{x^2 + y^2 + 2x \leq 0\}$ e nel cono $\left\{z + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\right\}$.

Sol.: La descrizione della regione suggerisce il passaggio alle coordinate $(x, y, z) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, h)$; rispetto a questa scelta la regione E viene descritta come

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \left\{(\rho, \vartheta, h) : 1 \leq h \leq 4 - \rho; \rho^2 + 2\rho \cos \vartheta \leq 0\right\} \\ &= \left\{(\rho, \vartheta, h) : 1 \leq h \leq 4 - \rho; \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq -2 \cos \vartheta\right\}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}vol\,(E) &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^{-2\cos\vartheta} \left(\int_1^{4-\rho} dh\right) \rho \, d\rho\right) d\vartheta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int_0^{-2\cos\vartheta} (3 - \rho)\, \rho \, d\rho\right) d\vartheta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(6\cos^2\vartheta + \frac{8}{3}\cos^3\vartheta\right) d\vartheta = \ldots = 3\pi - \frac{32}{9}\,.\end{aligned}$$

2] Calcolare i valori degli integrali $\displaystyle\iint_{C_R} f(x,y)\,dxdy$ **nei tre casi** $R=0$, $R=1$ **e** $R=2$, **dove** $f(x,y)=x$ **e**

$$C_R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq R^2; 0\leq x\leq y\leq 1\right\}$$

Sol.: la regione C_R si ottiene intersecando l'esterno del disco di centro $(0,0)$ e raggio R con il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

Per $\boxed{R=2}$ l'intersezione è vuota, e quindi $\iint_{C_2} f = 0$.

Nel caso $\boxed{R=0}$, la regione è l'intero triangolo, ed il calcolo dell'integrale è immediato

$$\iint_{C_0} f = \int_0^1 \left(\int_0^y x\,dx\right) dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{6}\,.$$

Un po' più articolato il caso $\boxed{R=1}$. La regione C_1 è un triangolo mistilineo, con due lati rettilinei e il terzo costituito da un arco di circonferenza. Passando a coordinate polari

$$\begin{aligned}\tilde{C_1} &= \left\{(\rho,\vartheta) : \rho^2\geq 1, 0\leq \rho\cos\vartheta\leq\rho\sin\vartheta\leq 1\right\}\\ &= \left\{(\rho,\vartheta) : \frac{\pi}{4}\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}, 1\leq\rho\leq\frac{1}{\sin\vartheta}\right\}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\iint_{C_1} f &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_1^{1/\sin\vartheta} (\rho\cos\vartheta)\,\rho\,d\rho\right) d\vartheta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\vartheta\left(\int_1^{1/\sin\vartheta} \rho^2 d\rho\right) d\vartheta\\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin^3\vartheta}-1\right)\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\left(\frac{1}{u^3}-1\right) du\\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2u^2}-u\right)\Bigg|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{\sqrt{2}-1}{6}\,.\end{aligned}$$