Integrali curvilinei

(n.b.: contiene tracce di soluzioni, e può contenere errori di calcolo)

Marco Vignati - Metodi matematici applicati alla chimica - L.M. in Chimica - 2015/16

20] *Calcolare la lunghezza della curva γ parametrizzata come*

$$\mathbf{p}\left(t\right)=\left(t,\frac{3t^2}{2},\frac{3t^3}{2}\right)\ ,\quad t\in[0,3]$$

Sol.: la curva è regolare; il vettore "velocità" è $\mathbf{p}'\left(t\right)=\left(1,3t,\frac{9t^2}{2}\right)$; l'elemento d'arco infinitesimo ha lunghezza

$$ds=\left\|\mathbf{p}'\left(t\right)\right\|dt=\sqrt{1+9t^2+\frac{81t^4}{4}}\,dt=\left(1+\frac{9t^2}{2}\right)\,dt$$

e quindi

$$L\left(\gamma\right)=\int_\gamma ds=\int_0^2\left(1+\frac{9t^2}{2}\right)dt=14\ .$$

21] *Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide* $\mathbf{p}\left(t\right)=\left(t-\sin t,1-\cos t\right)$, $t\in[0,2\pi]$.

Sol.: $\mathbf{p}'\left(t\right)=\left(1-\cos t,\sin t\right)\neq\mathbf{0}\ \forall t$; curva regolare; $ds=\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}dt=2\sin\left(t/2\right)\,dt$; $L=8$.
(Si tratta della curva descritta da un punto posto sul bordo di un disco che rotola senza strisciare lungo una retta, compiendo un giro completo.)

22] *Calcolare* $\int_\gamma x\,ds$, *dove* γ *è l'intersezione della sfera* $\left\{x^2+y^2+z^2=1\right\}$ *con il piano* $\left\{x+y=1\right\}$.

Sol.: γ è una circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Una parametrizzazione comoda è

$$\mathbf{p}\left(t\right)=\left(\tfrac{1+\sin t}{2},\tfrac{1-\sin t}{2},\tfrac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ t\in[0,2\pi]$$

da cui $ds=\left\|\mathbf{p}'\left(t\right)\right\|dt=dt/\sqrt{2}$, e

$$\int_\gamma x\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin t}{2}\,\frac{dt}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

23] *Descrivere un curva piana mediante <u>coordinate polari</u> significa:*
-) *assegnare una funzione non-negativa* $\rho=\rho\left(\vartheta\right)$, $\vartheta\in[\alpha,\beta]$;

-) *utilizzare la parametrizzazione*

$$\mathbf{p}\left(\vartheta\right)=\left(x\left(\vartheta\right),y\left(\vartheta\right)\right)=\left(\rho\left(\vartheta\right)\cos\vartheta,\rho\left(\vartheta\right)\sin\vartheta\right)\ ;$$

-) *in questo caso* $ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\vartheta$.

24] *La* spirale logaritmica *è descritta da* $\rho(\vartheta) = e^{-\vartheta}$. *Al crescere di* ϑ *il raggio decresce; si ottiene una curva che si "avvolge" in senso orario verso l'origine, senza autointersecarsi. La lunghezza totale delle infinite spire che partono da* $(1,0)$ (*corrispondente a* $\alpha = 0$) *e si avvolgono verso* $(0,0)$ (*corrispondente a* $\beta = +\infty$) *è*

$$L = \int_\gamma ds = \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-\vartheta}\, d\vartheta = \sqrt{2}$$

(l'integrale improprio è convergente!)

25] *Sia* γ *il cammino piano chiuso percorso una sola volta, in senso orario, partendo da* $A = (0,1)$, *raggiungendo* $B = (1,0)$ *lungo la* $\{x^2 + y^2 = 1\}$; *poi raggiungendo* $C = (-1,0)$ *lungo l'arco di parabola* $\{y = x^2 - 1\}$, *e infine tornando ad* A *in modo rettilineo. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y) = (y\,,\, x^2)$ *lungo* γ.

Sol.: il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo una curva regolare (-a-tratti), e orientata, di parametrizzazione $\mathbf{p}$ è

$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \bullet \mathbf{p}')(\mathbf{p}(t))\, dt$$

dove $\mathbf{T} = \mathbf{p}' / \|\mathbf{p}'\|$ è il versore tangente. In questo caso vanno sommati i tre contributi

$$\mathbf{p}(t) = (\cos t, \sin t)\ ,\quad t : \frac{\pi}{2} \mapsto 0\ ;\quad \mathbf{p}(t) = (t, t^2 - 1)\ ,\quad t : 1 \mapsto -1\ ;\quad \mathbf{p}(t) = (t, t+1)\ ,\quad t : -1 \mapsto 0$$

ottenendo

$$W = -\int_0^{\pi/2} (\sin t, \cos^2 t) \bullet (-\sin t, \cos t)\, dt - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1, t^2) \bullet (1, 2t)\, dt + \int_{-1}^{0} (1 + t, t^2) \bullet (1,1)\, dt =$$
$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \cos^3 t)\, dt - \int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2 - 1)\, dt + \int_{-1}^{0} (t^2 + t + 1)\, dt = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\,.$$

26] *Discutere la conservatività dei campi vettoriali*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2\,,\, y\,,\, z^3) \quad e \quad \mathbf{G}(x,y,z) = (z^2 - xe^z\,,\, y + 2\,,\, e^x)$$

nell'insieme $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Sol.: Negli insiemi aperti e semplicemente connessi, la conservatività di un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ equivale alla sua irrotazionalità. In questo caso, $\mathbf{F}$ è conservativo perché

$$rot\mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & y & z^3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

e i potenziali sono della forma $U(x,y,z) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^4}{4} + c$.
Invece $\mathbf{G}$ non lo è, perché

$$rot\mathbf{G} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 - xe^z & y + 2 & e^x \end{bmatrix} = -(e^x + xe^z - 2z)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$$

27] *Discutere la conservatività del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y) = \left(xy\,,\,\dfrac{x^2}{2}\right)$ *nell'insieme* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Sol.: Per tradurre la nozione di $rot\mathbf{F}$ nel caso di dimensione 2, può essere comodo pensare al campo definito in $\mathbb{R}^3$, con la terza componente $F_3 \equiv 0$. Così la condizione che negli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2$ equivale alla conservatività di $\mathbf{F}$ è espressa da

$$\partial_x F_2 = \partial_y F_1$$

Nel nostro caso $\partial_x F_2 = x = \partial_y F_1$, e quindi $\mathbf{F}$ è conservativo. Potenziali: $U(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2} + c$.

28] *Calcolare il lavoro del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y) = \left(xy\,,\,\dfrac{x^2}{2}\right)$ *lungo la poligonale che unisce, nell'ordine i punti*
$(0,0)\,,\,\left(\frac{1}{2},2\right)\,,\,(1,2)\,,\,\left(\frac{3}{2},1\right)\,,\,(3,4)$ *e* $\left(\pi,\frac{1}{\pi}.\right)$
Sol.: $\pi/2$.

29] *Per quali valori* $a,b \in \mathbb{R}$ *il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{ay-2x}{x^2+4y^2}\,,\,\frac{bx-8y}{x^2+4y^2}\right)$$

è conservativo in $\Omega = \{x,y>0\}$? *Discuterne poi la conservatività in* $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Sol.: $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(A)$, e la condizione

$$\partial_x\left(\frac{bx-8y}{x^2+4y^2}\right) = \partial_y\left(\frac{ay-2x}{x^2+4y^2}\right)$$

(cioè $b=-a$) è necessaria. Poiché Ω è convesso, questa condizione è anche sufficiente.

In A, invece, va richiesto che sia nullo il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo una qualsiasi curva γ, chiusa e orientata, contenuta in A. L'irrotazionalità di $\mathbf{F}$ e il teorema di invarianza omotopica ci permettono di ridurre il calcolo ad una sola curva chiusa che circonda $(0,0)$. È comoda la scelta dell'ellisse $\left\{x^2+4y^2=1\right\}$, parametrizzata tramite

$$\mathbf{p}(t) = \left(\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t\right) \quad t: 0 \mapsto 2\pi$$

In questo caso $\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\, ds = -a\pi$, e quindi $\mathbf{F}$ è conservativo in A se e solo se $a=b=0$.