Metodi matematici applicati alla Chimica

LM in Chimica (F5Y) , prof. M.Vignati , prova scritta del 10.2.2016

1] Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2ty}{1+t^2} + t\,y^3 \\ \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$$

e specificare in quale intervallo I è definita.

2] Determinare il massimo e il minimo valore che la funzione

$$f\,(x, y, z) = e^{2x-y+z}$$

assume nell'insieme

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

(**Sugger.:** può essere utile osservare che la funzione $t \longmapsto e^t$ è positiva e crescente.)

3] Calcolare il valore della circuitazione $\oint_{\gamma^+} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{p}$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}\,(x, y) = \left(xy - e^x\,,\, x^2 - x + 3y\right)$$

lungo il sostegno γ della curva

$$\mathbf{p}\,(t) = \left(\frac{3\cos t}{2}, \frac{3\sin t - 2}{2}\right) \quad , \qquad t : 0 \longmapsto 2\pi$$

4] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}\,(x, y) = \left(\frac{y}{2x^2 + y^2 - 2xy}\,,\, \frac{-x}{2x^2 + y^2 - 2xy}\right)$$

lungo l'arco di parabola $\left\{y = (x-1)^2\right\}$ che unisce il punto $A = (1, 1)$ al punto $B = (2, 0)$.

(**Sugger.:** può essere utile ricordare che per i campi irrotazionali il lavoro lungo cammini omòtopi è invariante.)

5] **(Facoltativo)** Calcolare il valore di $\displaystyle\iint_A f\,(x, y)\,dxdy$, dove

$$f\,(x, y) = \frac{|y|\,\sqrt{x}}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \le x\sqrt{2}\right\}$$

Metodi matematici applicati alla Chimica

prova parziale #2-bis

LM in Chimica (F5Y) , prof. M.Vignati , prova scritta del 10.2.2016

1] La superficie semisferica $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazione $\left\{x^2+y^2+z^2=R^2;\ z\geq 0\right\}$ viene tagliata con il piano $\{z=h\}$, $0\leq h\leq R$. Calcolare, in funzione di h, l'area della calotta

$$\Sigma_h^+=\left\{x^2+y^2+z^2=R^2;\ z\geq h\right\}$$

2] Determinare il massimo e il minimo valore che la funzione

$$f(x,y,z)=e^{2x-y+z}$$

assume nell'insieme

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

(**Sugger.:** può essere utile osservare che la funzione $t\longmapsto e^t$ è positiva e crescente.)

3] Calcolare il valore della circuitazione $\oint_{\gamma^+}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{p}$ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(xy-e^x\,,\,x^2-x+3y\right)$$

lungo il sostegno γ della curva

$$\mathbf{p}(t)=\left(\frac{3\cos t}{2},\frac{3\sin t-2}{2}\right)\quad,\qquad t:0\longmapsto 2\pi$$

4] Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{y}{2x^2+y^2-2xy}\,,\,\frac{-x}{2x^2+y^2-2xy}\right)$$

lungo l'arco di parabola $\left\{y=(x-1)^2\right\}$ che unisce il punto $A=(1,1)$ al punto $B=(2,0)$.

(**Sugger.:** può essere utile ricordare che per i campi irrotazionali il lavoro lungo cammini omòtopi è invariante.)

5] **(Facoltativo)** Calcolare il valore di $\iint_A f(x,y)\,dxdy$, dove

$$f(x,y)=\frac{|y|\sqrt{x}}{x^2+y^2}\qquad\text{e}\qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\leq x\sqrt{2}\right\}$$